UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título
Análisis diádico y desigualdades con peso
Autor/es
Edgar Labarga Varona
Director/es
Francisco Javier Duoandikoetxea Zuazo y Juan Luis Varona Malumbres
Facultad
Facultad de Ciencias, Estudios Agroalimentarios e Informática
Titulación
Máster Interuniversitario en Modelización matemática, estadística y computación
Departamento
Curso Académico
2013-2014

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Facultad

Facultad de Ciencias, Estudios Agroalimentarios e Informática

Titulación

Máster en Modelización e Investigación Matemática, Estadística y Computación

Título

Análisis diádico y desigualdades con peso

Autor/es

Edgar Labarga Varona

Tutor/es

Javier Duoandikoetxea Zuazo (tutor) y Juan Luis Varona Malumbres (cotutor)

Departamento

Matemáticas y Computación

Curso académico

2013 - 2014

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Trabajo Fin de Máster en Modelización
e Investigación Matemática, Estadística y Computación

Análisis diádico y desigualdades con peso

Facultad de Ciencias, Estudios
Agroalimentarios e Informática

Departamento de Matemáticas y Computación

Curso académico 2013 - 2014

Autor: Edgar Labarga Varona
Tutor: Javier Duoandikoetxea Zuazo
Cotutor: Juan Luis Varona Malumbres

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es obtener los clásicos resultados de acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood en los diferentes espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $L^p(w)$, con w un peso, preocupándonos también, en este último caso, de la dependencia en términos de la constante del peso. Para ello, haremos uso del análisis diádico estudiando primero acotaciones de los operadores maximales diádicos y mayorando puntualmente después la función maximal de Hardy-Littlewood por estos operadores.

A lo largo del trabajo se introducirán las clases A_p y los pesos A_p que son los pesos para los cuales la función maximal de Hardy-Littlewood está acotada en $L^p(w)$ y se darán algunas de sus propiedades básicas así como un método de construcción. Además, veremos varios resultados fundamentales en el análisis armónico como el teorema de diferenciación de Lebesgue, la descomposición de Calderón-Zygmund y la desigualdad de Hölder inversa.

Concluiremos la memoria mencionando algunas de las aplicaciones que ha tenido el análisis diádico en la teoría de operadores de Calderón-Zygmund. En particular, explicaremos en qué consiste la conjetura A_2 y haremos una breve exposición de las llamadas familias dispersas o *sparse families.*

Abstract

The main aim of this project is obtain classic bounded results from Hardy-Littlewood maximal operator on $L^p(\mathbb{R}^n)$ and $L^p(w)$, w a weight, paying attention in this last case on the growth of the norm in terms of the A_p constant of w.

Throughout the work, A_p classes and A_p weights will be introduced. These weights are for which the maximal operator M is bounded on $L^p(w)$. We show some of their main properties and a construction method. We also see some fundamental analysis results like Lebesgue's differentiation theorem, Calderón-Zygmund descomposition and reverse Hölder inequality.

To conclude the project we give some applications of dyadic analysis on Calderón-Zygmund operators theory. Specifically, we exposed called A_2 conjeture and we give a short display of sparse families.

Índice general

1. Introducción **1**

2. El operador maximal de Hardy-Littlewood **7**
2.1. El teorema de diferenciación de Lebesgue 16

3. El operador maximal diádico **17**
3.1. Cubos diádicos y el operador maximal diádico 18
3.1.1. Operador maximal diádico con una medida general 22
3.1.2. Acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood mediante el operador maximal diádico. Otras colecciones diádicas 24
3.2. Descomposición de Calderón-Zygmund 27

4. Desigualdades con pesos A_p **31**
4.1. Clases A_p 32
4.1.1. Propiedades básicas de los pesos A_p 33
4.1.2. Construcción de pesos A_p 36
4.1.3. La clase A_∞ y la desigualdad de Hölder inversa . . 37
4.2. Desigualdades con pesos para los operadores maximales . 41

5. Epílogo **47**

Bibliografía **51**

Capítulo 1

Introducción

El 21 de Diciembre de 1807, motivado por encontrar una solución al problema de la difusión del calor, el matemático francés Jean Batipste Joseph Fourier presentó un trabajo al Institut de France de nombre *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides*. El escaso éxito que tuvo entre el tribunal designado para evaluar esta memoria, en parte debido a la incertidumbre que presentaban las técnicas que se usaban en ella para deducir las ecuaciones de la propagación del calor, le hicieron volver a presentar, a finales de 1811, otro artículo de nombre *Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides* que, de nuevo sin éxito, no fue publicado.

En 1822, tras un intento seis años después de pertenecer a la Académie des Sciences Fourier —de la cual posteriormente sería miembro—, Fourier publicó su libro *Théorie analytique de la chaleur* el cual supondría un punto de inflexión en el análisis matemático.

Fourier aseguraba que cualquier función podía ser representada mediante una suma de funciones sinusoidales aunque muchos aspectos de sus innovadores estudios seguían presentando cuestiones sin un funda-

Figura 1.1: A la izquierda, un retrato de Jean Batipste Joseph Fourier, a la derecha, la portada de su libro *Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides.*

mento matemático sólido. Por ejemplo, la convergencia de dicha suma no era del todo clara. Varios matemáticos también se preguntaban cómo era posible que una función con discontinuidades podría ser aproximada por una suma de funciones sinusoidales que era continua.

Posteriormente al trabajo de Fourier, una gran parte de los trabajos de análisis se dedicaron a formalizar todos estos conceptos y suposiciones. En la primera década del siglo XIX, el matemático Henri Lebesgue haría públicos sus trabajos aportando grandes contribuciones a la teoría de la medida y en los que introducía un nuevo concepto de integral, la integral de Lebesgue, que extendía la integral de Riemann. Surgieron así los espacios $L^p(X,\mu)$, con (X,μ) un espacio de medida positiva, que se definen como el espacio cociente $\mathcal{L}^p(X,\mu)/\mathcal{N}(\mu)$ donde

$$\mathcal{L}^p(X,\mu) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C},\ \text{medible} : \|f\|_{\mathcal{L}^p(X,\mu)} < \infty\},$$

donde

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(X,\mu)} = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^p,$$

y

$$\mathcal{N}(\mu) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C},\ \text{medible} : f \equiv 0\ \mu - \text{ctp}\},$$

para una función f medible y $1 < p < \infty$. Definiendo la norma

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} = \|f + \mathcal{N}(\mu)\|_{\mathcal{L}^p(X,\mu)},$$

el espacio $(L^p(X,\mu), \|\cdot\|_{L^p(X,\mu)})$ es un espacio normado. Para $p = \infty$ se define el espacio L^∞ como el espacio de todas las funciones medibles f tales que $\|f\|_{L^\infty(X,\mu)}$ es una cantidad finita donde

$$\|f\|_{L^\infty(X,\mu)} = \{\lambda > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) = 0\}.$$

Dado un espacio $L^p(X,\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$ se define su espacio dual como $L^{p'}(X',\mu)$ donde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

(suponemos que si $p = 1$ entonces $p' = \infty$ y viceversa). A la pareja p y p' se le suele denominar exponentes conjugados.

Los espacios $L^p(X,\mu)$ hicieron plantearse interpretar las funciones como puntos de un espacio. Con esta idea aparecieron los operadores funcionales que envían funciones de un cierto espacio a funciones de otro espacio. Un caso particular son las llamadas integrales singulares, entre las que podemos citar la transformada de Hilbert y la transformada de Riesz.

Otro importante logro para el análisis fue la definición del operador maximal de Hardy-Littlewood en [12] por los matemáticos G. H. Hardy y J. E. Littlewood mediante el cual, entre otras aplicaciones teóricas, cabe

Figura 1.2: Dos primeras fotografías de G. H. Hardy y de J. E. Littlewood a los que se les atribuye el operador maximal que lleva su nombre. A la derecha una foto de B. Muckenhoupt cuyas aportaciones a la teoría de pesos supusieron un punto de inflexión.

citar una sencilla demostración del teorema de diferenciación de Lebesgue. Además, este operador obtuvo más importancia cuando se observó que de alguna manera controlaba las singularidades de las integrales singulares.

Ya en su artículo de 1930, Hardy y Littlewood demostraron acotaciones en $L^p(\mathbb{R})$ para el operador maximal de Hardy-Littlewood que más tarde serían extendidas a $L^p(\mathbb{R}^n)$ por N. Wiener en [25]. Cuarenta y dos años después del trabajo de Hardy y Littlewood, Benjamin Muckenhoupt publicó un artículo (ver[18]) en el que obtenía una caracterización para la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood en los espacios $L^p(w)$, con w un peso, mediante la llamada condición A_p. Este fue un hecho importante en la teoría de pesos ya que los estudios efectuados hasta ese momento solo consideraban casos en los que el peso $w(x)$ tuviera la forma $|x|^a$ (pesos potencia). Además, la introducción de los pesos A_p adquirió un carácter más significativo cuando se demostró que otros operadores clásicos compartían las desigualdades con pesos del operador maximal de Hardy-Littlewood.

A partir del trabajo de Muckenhoupt se incentivó el interés en lo respectivo a la teoría de pesos. En 1981 se publicó el libro de J. Garnett [9] que incluía una sección en la que se trataban pesos con la función maximal de Hardy-Littlewood y la transfomada de Hilbert. Cuatro años después el libro de J. García-Cueva y J. L. Rubio de Francia [8] sería uno de los primeros en tener como tema principal desigualdades con peso.

Ya en la década de los 90, el matemático irlandés S. Buckley en su tesis [1], se preocupó de estudiar el crecimiento que presentaba la norma del operador maximal de Hardy-Littlewood en función de la llamada constante A_p del peso w en el espacio $L^p(w)$. En su estudio obtuvo una constante óptima de acotación para el citado operador. Sin embargo, este interés de optimizar las constantes para otros operadores clásicos no se produjo hasta que en 2002, S. Petermichl y A. Volberg se ocuparan de ello con el operador de Beurling. A partir de ahí, la teoría desarrollada ha hecho especial hincapié en el estudio del crecimiento de las constantes de los pesos en las normas de los operadores.

Es en este periodo, entre la aparición del operador maximal de Hardy-Littlewood y la ocupación actual del tamaño de las constantes del peso que inició Buckley en su tesis donde se enmarca este trabajo. A lo largo de él utilizaremos conceptos y resultados de análisis que de alguna forma aparecerán explícitos o implícitos como por ejemplo nociones básicas de teoría de la medida, desigualdad de Hölder, definición de función integrable o localmente integrable,... Todo esto puede ser consultado por ejemplo en [21] o en [24].

En general, seguiremos una notación estándar similar a la que se utiliza en [6], [7] o [11] aunque hemos procurado a lo largo del trabajo hacer comentarios al respecto.

La presente memoria se estructura en cinco capítulos incluyendo esta introducción que es el primero de ellos. Damos a continuación un breve de resumen de los demás.

En el segundo, titulado *El operador maximal de Hardy-Littlewood*, presentamos el citado operador definido con cubos en $\mathbb{R}^n$. Veremos también que es posible definirlo con cubos centrados y bolas centradas y no centradas y mostraremos equivalencias entre ellos. Seguidamente expondremos las nociones de operador fuerte y débil y probaremos la acotación débil del operador maximal de Hardy-Littlewood en $L^1(\mathbb{R}^n)$ así como la acotación fuerte en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$, ambas de una forma clásica, esto es, mediante el lema de recubrimiento de tipo Vitali y el teorema de interpolación de Marcinkiewicz.

En el tercer capítulo titulado *El operador maximal diádico* introduciremos los conocidos como cubos diádicos a partir de los cuales definiremos el operador maximal diádico con la medida de Lebesgue y con una medida de Borel μ localmente finita. Estudiaremos sus propiedades de acotación en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $L^p(\mu)$ respectivamente, y veremos que para $p = 1$ existe una acotación de tipo débil y para $1 < p \leq \infty$ una de tipo fuerte. Probaremos que no es posible deducir propiedades de acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood mediante únicamente el operador maximal diádico anteriormente definido con la medida de Lebesgue y definiremos otros operadores diádicos. A partir de ahí, mayoraremos puntualmente el operador maximal de Hardy-Littlewood por medio de varios operadores diádicos lo que nos permitirá deducir propiedades de acotación del primero a partir de las propiedades de estos últimos. Para finalizar el capítulo veremos un resultado de gran relevancia en el análisis armónico conocido como descomposición de Calderón-Zygmund.

En el cuarto capítulo, *Desigualdades con pesos A_p*, nos centraremos en estudiar acotaciones del operador maximal de Hardy-Littlewood y del operador maximal diádico en los espacios $L^p(w)$ donde w es un peso. Empezaremos viendo las clases A_p y los pesos en A_p. Expondremos sus propiedades básicas y un algoritmo que permite construir pesos en A_p. Daremos también otro resultado importante en teoría de pesos comúnmente denominado como desigualdad de Hölder inversa. Después seguiremos un procedimiento similar al del capítulo anterior, buscaremos acotaciones primero para los operadores maximales diádicos en $L^p(w)$ para luego deducir propiedades de acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood y además, nos preocuparemos de las constantes del peso en estas acotaciones.

El quinto y último capítulo será un epílogo en el que se expondrá el concepto de operador de Calderón-Zygmund relacionado con la conjetura A_2 y la noción de familia dispersa (*sparse family*) que servirá como cierre del trabajo.

Agradecimientos

Quiero agradecer, primera y principalmente, a mi tutor Javi el haber aceptado dirigir este trabajo fin de máster y el tiempo que me ha dedicado. Su disposición, sus indicaciones y sus explicaciones han sido de gran ayuda y sin ellas no habría sido posible la realización de este documento. Él es quien me ha guiado en los aspectos teóricos y en parte de la estructuración del mismo. Además, durante este periodo me ha enseñado una gran variedad de nuevos conocimientos que espero me sirvan en un futuro.

Por otro lado, me gustaría expresar también mis agradecimientos a mi cotutor Juan Luis por las valiosas aportaciones relativas a la presentación del trabajo, más en concreto, sus contribuciones en cuanto a las dudas que me han ido surgiendo acerca del código LaTeX a medida que lo elaboraba. Es la persona que me ayudó a formalizar mi escritura en dicho código y a la que debo la mayoría de mis conocimientos en lo respectivo al mundo de LaTeX. Le doy las gracias por su tiempo prestado, por su amabilidad y por su colaboración.

No quiero dejar pasar tampoco la oportunidad de agradecer a todos los profesores que han contribuido en mi formación académica estos años y de los cuales he aprendido muchas aptitudes que me han sido de gran ayuda a la hora de elaborar el presente documento. Hacer un especial hincapié al Dr. D. Óscar Ciaurri Ramírez y al ya anteriormente mencionado Dr. D. Juan Luis Varona por ponerme en contacto con mi tutor para comenzar a trabajar en esta memoria.

Por último, mencionar a mis familiares, las personas más importantes en mi vida.

Capítulo 2

El operador maximal de Hardy-Littlewood

Uno de los operadores más famosos en el análisis armónico es el llamado operador maximal de Hardy-Littlewood o también conocido comúnmente como función maximal de Hardy-Littlewood: para una función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, se define el operador maximal de Hardy-Littlewood de f como

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos, Q, de $\mathbb{R}^n$ que contienen al punto x cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenadas[1] y donde $|Q|$ denota la medida de Lebesgue del cubo Q, de tal manera que si $l(Q)$ representa la longitud del lado del cubo Q se tiene que $|Q| = l(Q)^n$. Este operador fue introducido en 1930 por los matemáticos G. H. Hardy y J. E. Littlewood (ver [12]) en el caso unidimensional —en realidad en $(0, \infty)$—. Más tarde, ya en 1939, N. Wiener extendió la definición a dimensiones superiores (ver [25]).

Análogamente a la definición que acabamos de ver con cubos que contienen al punto x, existen versiones del operador con cubos centrados en x y con bolas centradas y no centradas en x. Es posible probar que todos estos operadores son equivalentes o comparables debido a que se tienen desigualdades puntuales entre todos ellos[2].

Por ejemplo, para ver que el operador maximal de Hardy-Littlewood $Mf(x)$ definido con cubos es equivalente al operador maximal de Hardy-

[1] No asumir este hecho únicamente nos llevaría a incluir una constante dimensional en los resultados.

[2] Recordemos que dos operadores T_0 y T_1 son equivalentes o comparables si existen constantes c, C, $c < C$, tales que

$$cT_1 f(x) \leq T_0 f(x) \leq CT_1 f(x),$$

para cualquier función f en el dominio del operador.

Littlewood $M^b f(x)$ definido con bolas notemos que dada una bola cualquiera en $\mathbb{R}^n$ de radio r y una función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|\,dy \leq \frac{|Q|}{|B|}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy,$$

donde Q es el cubo de menor lado que contiene a B. De esta manera, $M^b f(x) \leq |Q|/|B| Mf(x)$ con

$$|Q| = (2r)^n, \qquad \text{y} \qquad |B| = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}(r^n),$$

y Γ la función Gamma de Euler. Por otra parte, dado un cubo Q de lado l en $\mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy \leq \frac{|B|}{|Q|}\frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|\,dy,$$

donde B es la bola de menor radio que contiene a Q. Entonces $Mf(x) \leq |B|/|Q| M^b f(x)$ con

$$|Q| = (2l)^n, \qquad \text{y} \qquad |B| = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}(ln^{1/2})^n.$$

Luego, acabamos de probar que existen constantes c y C que dependen de la dimensión n tal que

$$cM^b f(x) \leq Mf(x) \leq CM^b f(x),$$

y así, $Mf(x)$ y $M^b f(x)$ son equivalentes.

Otro ejemplo, denotando por $M^c f$ el operador maximal de Hardy-Littlewood donde el supremo se toma sobre todos las bolas centradas en el punto x, se tiene que

$$M^c f(x) \leq M^b f(x) \leq 2^n M^c f(x).$$

La primera desigualdad es clara pues las bolas centradas en un punto x son un caso particular de bolas que contienen a x. Para la segunda desigualdad hemos de fijarnos que cualquier bola que contenga al punto x está contenida en una bola de radio doble por la desigualdad triangular en $\mathbb{R}^n$.

Para entender los conceptos y argumentos que se presentarán más adelante, es conveniente conocer las nociones de operador fuerte y débil[3] que introducimos a continuación.

[3]Equivalentemente, se suele decir que el operador cumple una desigualdad de tipo fuerte o de tipo débil.

Definición 2.1 (Operador (p,q)-fuerte)**.** Dados dos espacios de medida (X,μ) y (Y,ν), diremos que un operador T definido del espacio $L^p(X,\mu)$ en el espacio de las funciones medibles de Y a $\mathbb{C}$ es (p,q)-fuerte (o de modo equivalente acotado de $L^p(X,\mu)$ en $L^q(Y,\nu)$) si cumple la desigualdad

$$\|Tf\|_{L^q(Y,\nu)} \leq C\|f\|_{L^p(X,\mu)},$$

donde C es una constante que depende únicamente de p, q y la dimensión del espacio.

A lo largo del trabajo, será habitual que si el operador está definido de un espacio $L^p(X,\mu)$ en sí mismo, como ocurrirá a menudo, omitamos la terminología (p,p)-fuerte y hablemos de operador acotado en $L^p(X,\mu)$ o simplemente de operador acotado si queda claro por el contexto el espacio en el que estemos trabajando.

Definición 2.2 (Operador (p,q)-débil)**.** Dados dos espacios de medida (X,μ) y (Y,ν), diremos que un operador T definido del espacio $L^p(X,\mu)$ en el espacio de las funciones medibles de Y a $\mathbb{C}$ es (p,q)-débil ($q<\infty$) si cumple la desigualdad

$$\nu(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^p(X,\mu)}\right)^q,$$

donde C es una constante que depende únicamente de p, q y la dimensión del espacio y λ es una constante positiva.

Diremos que el operador T es (p,∞)-débil si es un operador acotado de $L^p(X,\mu)$ en $L^\infty(Y,\nu)$, esto es,

$$\|Tf(x)\|_{L^\infty(Y,\nu)} \leq C\|f\|_{L^p(X,\mu)},$$

con C una constante que sólo depende de la dimensión y de p.

Nota 2.3. a) Si un operador T es de tipo (p,q)-fuerte entonces también es de tipo (p,q)-débil. En efecto, si denotamos por $E_\lambda = \{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\nu(E_\lambda) &= \int_{E_\lambda} d\nu(y) \leq \int_{E_\lambda} \left|\frac{Tf(y)}{\lambda}\right|^q d\nu(y) \leq \frac{\|Tf\|^q_{L^q(Y,\nu)}}{\lambda^q} \\ &\leq \left(\frac{C\|f\|_{L^p(X,\mu)}}{\lambda}\right)^q,\end{aligned}$$

con C una constante que depende solo de p,q y de la dimensión del espacio.

b) Si dos operadores T y T' son equivalentes y T es (p,q)-fuerte (equivalentemente (p,q)-débil) se tiene que T' también es (p,q)-fuerte (equivalentemente (p,q)-débil).

c) En el caso en que $(X, \mu) = (Y, \nu)$ y el operador T sea el operador identidad en la Definición 2.2, la desigualdad (p, p)-débil es la desigualdad de Chebyshev clásica

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^p(X,\mu)}\right)^p.$$

En ocasiones, en lo que sigue, simplificaremos la notación $\|\cdot\|_{L^p(X,\mu)}$ por $\|\cdot\|_{p,\mu}$ siempre que no haya lugar a confusión. En el caso particular en el que $X = \mathbb{R}^n$ y μ coincida con la medida de Lebesgue denotaremos $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\mu)}$ por $\|\cdot\|_p$.

Las propiedades de acotación de un operador tan frecuente como lo es en el análisis armónico el operador maximal de Hardy-Littlewood han sido el centro de muchos trabajos de grandes matemáticos. El artículo de Hardy y Littlewood donde se presenta este operador ([12]) ya incluía su acotación en $L^p(\mathbb{R})$, es decir, $\|Mf\|_p \leq C\|f\|_p$ para $1 < p \leq \infty$ (notar que el caso $p = \infty$ es inmediato de comprobar) y que es un operador $(1, 1)$-débil en $L^1(\mathbb{R})$.

Vamos a dar una demostración de estas propiedades de acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood en n dimensiones utilizando un lema que se denomina de recubrimiento de tipo Vitali —introducido por N. Wiener en [25]— y el llamado teorema de interpolación de Marcinkiewicz.

Lema 2.1 (de recubrimiento de tipo Vitali)**.** *De toda familia finita de cubos en* $\mathbb{R}^n$*,* $\{Q_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$*, se puede extraer una subfamilia* $\{Q_j : j = 1, \ldots, N\}$ *de cubos disjuntos tal que la unión de los cubos de lado triple de esa subfamilia recubren a la familia original, es decir,*

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} Q_\alpha \subset \bigcup_{j=1}^{N} 3Q_j. \tag{2.1}$$

Demostración. Construimos la subfamilia $\{Q_j : j = 1, \ldots, N\}$ de la siguiente forma: escogemos como Q_1 el cubo en $\{Q_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ de lado mayor (si existe más de uno seleccionamos uno cualquiera). Como Q_2 escogemos el cubo de lado mayor en $\{Q_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ tal que $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$. En general, como Q_j escogemos el cubo en $\{Q_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ disjunto con todos los anteriormente elegidos. Puesto que la familia de partida $\{Q_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ es finita, este proceso debe finalizar para algún j. Así obtenemos una subfamilia $\{Q_j : j = 1, \ldots, N\}$ de cubos disjuntos.

Notemos ahora que dicha subfamilia cumple (2.1). En efecto, un cubo Q en $\{Q_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ que no ha sido seleccionado para la subfamilia $\{Q_j : j = 1, \ldots, N\}$ debe intersecar con algún cubo de la subfamilia. Además Q debe tener radio menor o igual que algún cubo de la subfamilia con el que interseca. Luego $Q \subset 3Q_j$ para algún $j = 1, \ldots, N$. □

Una de las hipótesis que exigiremos en el enunciado del teorema de interpolación de Marcinkiewicz será la sublinealidad para un cierto operador. Diremos que un operador T es sublineal si verifica que

$$|T(f+g)(x)| \leq |Tf(x)| + |Tg(x)| \text{ y } |T(\alpha f)(x)| = |\alpha||Tf(x)|,$$

para dos funciones f y g en el dominio del operador y donde $\alpha \in \mathbb{C}$. La prueba del teorema que damos aquí se apoya en el siguiente lema que involucra conjuntos de la forma $\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}$, similares a los que aparecen en la desigualdad de la Definición 2.2.

Lema 2.2. *Sea (X, μ) un espacio de medida, $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ una función medible y sea $g : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ una función continuamente diferenciable, creciente y tal que $g(0) = 0$. Entonces*

$$\int_X g(|f(x)|)\, d\mu(x) = \int_0^\infty g'(\lambda)\mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\})\, d\lambda.$$

Demostración. Supongamos las hipótesis. Se tiene que

$$\begin{aligned} \int_X g(|f(x)|)\, d\mu(x) &= \int_X \int_0^{|f(x)|} g'(\lambda)\, d\lambda\, d\mu(x) \\ &= \int_X \int_0^\infty g'(\lambda)\chi_{\{x\in X:|f(x)|>\lambda\}}\, d\lambda\, d\mu(x). \end{aligned}$$

Aplicamos el teorema de Fubini y obtenemos que la expresión anterior es igual a

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty g'(\lambda) \int_X \chi_{\{x\in X:|f(x)|>\lambda\}}\, d\mu(x)\, d\lambda \\ &\qquad = \int_0^\infty g'(\lambda)\mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\})\, d\lambda. \end{aligned}$$ □

Con este lema podemos dar una representación de la norma de una función en $L^p(X, \mu)$. Observemos que si aplicamos el Lema 2.2 a la función $g(\lambda) = \lambda^p$, $p > 0$, tenemos que

$$\int_X |f(x)|^p\, d\mu(x) = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\})\, d\lambda. \tag{2.2}$$

Teorema 2.4 (de interpolación de Marcinkiewicz)**.** *Sean (X, μ) y (Y, ν) dos espacios medibles. Sea T un operador sublineal definido en $L^{p_0}(X, \mu) + L^{p_1}(Y, \nu)$ que es (p_0, p_0)-débil y (p_1, p_1)-débil, $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ (en el caso en que $p_1 = \infty$ suponemos que T es un operador acotado de $L^\infty(X, \mu)$ en $L^\infty(Y, \nu)$). Se tiene que T es (p, p)-fuerte para todo p tal que $p_0 < p < p_1$.*

Demostración. Sea $f \in L^p(X, \mu)$.

Supongamos primero que $p_1 < \infty$. Por hipótesis, se tiene que

$$\nu(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C_0}{\lambda}\|f\|_{p_0,\mu}\right)^{p_0}, \tag{2.3}$$

y que

$$\nu(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C_1}{\lambda}\|f\|_{p_1,\mu}\right)^{p_1}. \tag{2.4}$$

Queremos ver que $\|Tf\|_{p,\nu} \leq C\|f\|_{p,\mu}$. Para ello, descomponemos primero la función f como $f(x) = f_0(x) + f_1(x)$ donde

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > \alpha\lambda, \\ 0 & \text{si } |f(x)| \leq \alpha\lambda, \end{cases} \quad \text{y} \quad f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |f(x)| > \alpha\lambda, \\ f(x) & \text{si } |f(x)| \leq \alpha\lambda, \end{cases}$$

con α una constante que fijaremos más adelante. Notemos que $f_0 \in L^{p_0}(X, \mu)$ puesto que

$$\begin{aligned}\|f_0\|_{p_0,\mu}^{p_0} &= \int_{\{x \in X : |f(x)| > \alpha\lambda\}} |f(x)|^p |f(x)|^{p_0 - p}\, d\mu(x) \\ &\leq (\alpha\lambda)^{p_0 - p}\|f\|_{p,\mu}^p < \infty,\end{aligned}$$

y de manera análoga, $f_1 \in L^{p_1}(X, \mu)$ ya que

$$\begin{aligned}\|f_1\|_{p_1,\mu}^{p_1} &= \int_{\{x \in X : |f(x)| \leq \alpha\lambda\}} |f(x)|^p |f(x)|^{p_1 - p}\, d\mu(x) \\ &\leq (\alpha\lambda)^{p_1 - p}\|f\|_{p,\mu}^p < \infty.\end{aligned}$$

Por otra parte, debido a que el operador T es sublineal se tiene que $|Tf(x)| \leq |Tf_0(x)| + |Tf_1(x)|$ de donde obtenemos que

$$\begin{aligned}&\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\} \\ &\qquad \subset \{y \in Y : |Tf_0(y)| > \lambda/2\} \cup \{y \in Y : |Tf_1(y)| > \lambda/2\}.\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}&\nu(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}) \\ &\qquad \leq \nu(\{y \in Y : |Tf_0(y)| > \lambda/2\}) + \nu(\{y \in Y : |Tf_1(y)| > \lambda/2\}).\end{aligned}$$

Por (2.3) tenemos que

$$\nu(\{y \in Y : |Tf_0(y)| > \lambda/2\}) \leq \left(\frac{2C_0}{\lambda}\|f_0\|_{p_0,\mu}\right)^{p_0},$$

y por (2.4) que

$$\nu(\{y \in Y : |Tf_1(y)| > \lambda/2\}) \leq \left(\frac{2C_1}{\lambda}\|f_1\|_{p_1,\mu}\right)^{p_1}.$$

Entonces, utilizando (2.2) y las dos últimas desigualdades tenemos que

$$\begin{aligned}\|Tf(x)\|_{p,\nu}^p &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\nu(\{y\in Y : |f(y)|>\lambda\})\,d\lambda\\ &\le p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\frac{(2C_0)^{p_0}}{\lambda^{p_0}}\int_{\{x\in X:|f(x)|>\alpha\lambda\}}|f(x)|^{p_0}\,d\mu(x)\,d\lambda\\ &\quad + p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\frac{(2C_1)^{p_1}}{\lambda^{p_1}}\int_{\{x\in X:|f(x)|\le\alpha\lambda\}}|f(x)|^{p_1}\,d\mu(x)\,d\lambda\\ &= \left(\frac{p(2C_0)^{p_0}}{\alpha^{p-p_0}(p-p_0)} - \frac{p(2C_1)^{p_1}\alpha^{p_1-p}}{p-p_1}\right)\|f\|_{p,\mu}^p.\end{aligned}$$

Eligiendo cualquier α tenemos probada la acotación (p,p)-fuerte, en particular, tomando α de forma que la expresión

$$\frac{p(2C_0)^{p_0}}{\alpha^{p-p_0}(p-p_0)} - \frac{p(2C_1)^{p_1}\alpha^{p_1-p}}{p-p_1},$$

sea mínima. Para ello, derivando respecto a α obtenemos que

$$p(2C_0)^{p_0}\alpha^{p_0-p-1} + p(2C_1)^{p_1}\alpha^{p_1-p-1}.$$

Si igualamos a cero y despejamos α tenemos que

$$\alpha = (-2^{p_0-p_1}C_0^{p_0}C_1^{-p_1})^{1/(p_1-p_0)}.$$

Supongamos ahora que $p_1=\infty$. Como en el anterior caso, descomponemos la función f como $f(x)=f_0(x)+f_1(x)$ donde

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)|>\beta\lambda,\\ 0 & \text{si } |f(x)|\le\beta\lambda,\end{cases} \quad \text{y} \quad f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |f(x)|>\beta\lambda,\\ f(x) & \text{si } |f(x)|\le\beta\lambda,\end{cases}$$

con β una constante que fijaremos a continuación. Tenemos que

$$\|Tf_1\|_{L^\infty(Y,\nu)} \le C\|f_1\|_{L^\infty(X,\mu)} \le C\beta\lambda.$$

Tomamos $\beta = 1/(2C)$ y de esta manera $\nu(\{y\in Y : |Tf_1(y)|>\lambda/2\})=0$. Luego

$$\nu(\{y\in Y : |Tf(y)|>\lambda\}) \le \nu(\{y\in Y : |Tf_0(y)|>\lambda/2\}), \tag{2.5}$$

y puesto que T es por hipótesis (p_0,p_0)-débil se verifica que

$$\nu(\{y\in Y : |Tf_0(y)|>\lambda/2\}) \le \left(\frac{2C_0}{\lambda}\|f_0\|_{p_0,\mu}\right)^{p_0}. \tag{2.6}$$

Entonces, utilizando (2.2) y (2.6) tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|Tf\|_{p,\nu}^p &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\nu(\{y\in Y : |f(y)|>\lambda\})\,d\lambda \\
&\le p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\frac{(2C_0)^{p_0}}{\lambda^{p_0}}\int_{\{x\in X:|f(x)|>\lambda/(2C)\}}|f_0(x)|^{p_0}\,d\mu(x)\,d\lambda \\
&= p(2C_0)^{p_0}\int_X |f_0(x)|^{p_0}\int_0^{2C|f(x)|}\lambda^{p-p_0-1}\,d\lambda\,d\mu(x) \\
&= \frac{p(2C_0)^{p_0}(2C)^{p-p_0}}{p-p_0}\|f_0\|_{p,\mu}^p. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Como hemos mencionado, por medio del Lema 2.1 y del Teorema 2.4 podemos probar el siguiente resultado que muestra que el operador maximal de Hardy-Littlewood es un operador $(1,1)$-débil en $L^1(\mathbb{R}^n)$ y que está acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1<p\le\infty$.

Teorema 2.5. *Sea $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$. Para $p=1$ el operador maximal de Hardy-Littlewood cumple una desigualdad de tipo $(1,1)$-débil, es decir, se verifica que*

$$
|\{x\in\mathbb{R}^n : Mf(x)>\lambda\}| \le \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\,dx, \tag{2.7}
$$

donde $\lambda>0$ y C es una constante positiva que depende únicamente de n.

Para $1<p\le\infty$ el operador maximal de Hardy-Littlewood es un operador acotado en $L^1(\mathbb{R}^n)$, es decir, se cumple que

$$
\|Mf\|_p \le C\|f\|_p,
$$

donde C es una constante que depende únicamente de n y de p.

Demostración. Empecemos demostrando la desigualdad de tipo débil. Supongamos que $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Si x_0 es un punto del conjunto $\{x\in\mathbb{R}^n : Mf(x)>\lambda\}$ existe un cubo Q en $\mathbb{R}^n$ que contiene a x_0 tal que

$$
\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy>\lambda. \tag{2.8}
$$

Si denotamos por K un conjunto compacto contenido en $\{x\in\mathbb{R}^n : Mf(x)>\lambda\}$, se tiene que podemos cubrir a K por una familia finita de cubos de $\mathbb{R}^n$ verificando la desigualdad (2.8). Aplicando el Lema 2.1, podemos asegurar que existe una subfamilia disjunta $\{Q_j : j=1,\dots,N\}$ de cubos de tal forma que la unión en j de los cubos $3Q_j$ cubren el compacto K. Así,

$$
|K|\le\sum_{j=1}^N|3Q_j|\le\frac{3^n}{\lambda}\sum_{j=1}^N\int_{Q_j}|f(y)|\,dy\le\frac{3^n}{\lambda}\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:Mf(x)>\lambda\}}|f(y)|\,dy.
$$

Puesto que la medida de Lebesgue es regular[4], tomando el supremo sobre todos los compactos K contenidos en $\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$ obtenemos la acotación de tipo $(1,1)$-débil.

Ahora, para la acotación (p,p)-fuerte notemos que el operador maximal de Hardy-Littlewood claramente está acotado en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Así, aplicando el teorema de interpolación de Marcinkiewicz se tiene que M está acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$. $\square$

Notemos que la acotación en $L^1(\mathbb{R}^n)$ del operador maximal de Hardy-Littlewood no se cumple. En efecto, consideremos una función f no nula. Se tiene que existe un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ de medida positiva y acotado tal que

$$\int_A f(x)\,dx = \delta > 0.$$

Así, $Mf(x) \geq C|x|^{-n}$ para x lo suficientemente grande.

También notemos que es posible dar una mejor acotación que la que aparece en (2.7) procediendo de una forma similar a la demostración del Teorema 2.4. Siguiendo con la notación del Teorema 2.5 descomponemos la función f como $f(x) = f_0(x) + f_1(x)$ donde

$$f_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |f(x)| > t/2, \\ f(x) & \text{si } |f(x)| \leq t/2, \end{cases} \quad \text{y} \quad f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > t/2, \\ 0 & \text{si } |f(x)| \leq t/2. \end{cases}$$

Ahora, como M es un operador sublineal ($Mf(x) \leq Mf_0(x) + Mf_1(x)$) se tiene que

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\} \\ &\qquad \subset \{x \in \mathbb{R}^n : Mf_0(x) > \lambda/2\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : Mf_1(x) > \lambda/2\}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} &|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \\ &\qquad \leq |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf_0(x) > \lambda/2\}| + |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf_1(x) > \lambda/2\}|. \end{aligned}$$

Pero observemos que $|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf_0(x) > \lambda\}| = 0$. Aplicando ahora la desigualdad $(1,1)$-débil (2.7) a la expresión $|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf_1(x) > \lambda\}|$ se tiene que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda/2\}} |f(x)|\,dx. \tag{2.9}$$

[4] Dado un espacio topológico de Hausdorff y un espacio de medida X con medida asociada μ, diremos que la medida μ es regular si $\mu(K) < \infty$ para todo conjunto compacto K de X y para todo A conjunto boreliano en X se tiene que

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto y } K \subset A\},$$

y

$$\mu(A) = \inf\{\mu(B) : B \text{ abierto y } A \subset B\}.$$

2.1. El teorema de diferenciación de Lebesgue

Una aplicación importante del operador maximal de Hardy-Littlewood es el teorema de diferenciación de Lebesgue. Nos preguntamos si para toda función f en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ se cumple que

$$\lim_{l(Q)\to 0} \frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)\,dy = f(x),$$

en casi todo punto.

Teorema 2.6. *Sea $\{T_\lambda\}$ una familia de operadores lineales sobre $L^p(X,\mu)$, con (X,μ) un espacio de medida positiva. Sea*

$$T^*f(x) = \sup_\lambda |T_\lambda f(x)|.$$

Se tiene que si T^* es (p,q)-débil entonces el conjunto

$$\left\{ f \in L^p(X,\mu) : \lim_{\lambda\to\lambda_0} T_\lambda f(x) = f(x),\ \text{c.t.p.} \right\},$$

es cerrado en $L^p(X,\mu)$.

La demostración de este teorema puede consultarse en [6].

De este resultado se desprende el conocido como teorema de diferenciación de Lebesgue antes mencionado.

Teorema 2.7 (de diferenciación de Lebesgue)**.** *Sea una función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

$$\lim_{l(Q)\to 0^+} \frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)\,dy = f(x),$$

en casi todo punto.

Demostración. Siguiendo con la notación del Teorema 2.6, tomamos

$$T_\lambda f(x) = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)\,dy.$$

Así, $T^*f(x) = \sup_\lambda |T_\lambda f(x)| \leq Mf(x)$. Puesto que M es $(1,1)$-débil, T^* también lo será y por tanto, aplicando el Teorema 2.6, se tiene que el conjunto

$$\left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \lim_{\lambda\to 0^+} T_\lambda f(x) = f(x),\ \text{c.t.p.} \right\},$$

es cerrado. Puesto que las funciones continuas de soporte compacto están contenidas en este conjunto y son densas en $L^1(\mathbb{R}^n)$, el conjunto es precisamente $L^1(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Capítulo 3

El operador maximal diádico

En el capítulo anterior se ha presentado el operador maximal de Hardy-Littlewood y hemos estudiado alguna de sus propiedades de acotación en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$. En este capítulo, introduciremos los conocidos como cubos diádicos estándar cuyas propiedades particulares los hacen estructuras muy interesantes con numerosas aplicaciones teóricas. Daremos una primera construcción en $\mathbb{R}$ y luego la generalizaremos para dimensiones superiores.

Los cubos diádicos estándar forman la colección de cubos diádicos estándar en $\mathbb{R}^n$ mediante la cual definiremos el operador maximal diádico, primero con la medida de Lebesgue y después con una medida general μ —exigiremos que sea una medida de Borel localmente finita para que el operador maximal esté bien definido—. Seguidamente, veremos propiedades de acotación para estos operadores diádicos en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$.

En un intento de obtener las propiedades de acotación —vistas en el anterior capítulo— del operador maximal de Hardy-Littlewood a partir de las del operador maximal diádico definido con la medida de Lebesgue y asociado a la colección de los cubos diádicos estándar, observaremos que no es posible mayorar puntualmente el primero únicamente por el segundo por lo que introduciremos nuevas colecciones diádicas a las que asociaremos nuevos operadores diádicos. De esta manera, probaremos que el operador maximal de Hardy-Littlewood está mayorado puntualmente por varios operadores diádicos de tal forma que hereda las propiedades de acotación de éstos.

Concluiremos el capítulo viendo un resultado fundamental en análisis armónico conocido habitualmente como descomposición de Calderón-Zygmund mediante el cual, dada una función f en $L^1(\mathbb{R}^n)$ y un número real positivo λ, es posible descomponer el espacio $\mathbb{R}^n$ mediante cubos diádicos disjuntos de tal modo que el promedio de f en esos cubos esté acotado inferior y superiormente por constantes multiplicadas por λ y fuera de ellos la función esté acotada superiormente por λ. Además, se proporciona una cota para el tamaño de la unión de dichos cubos.

3.1. Cubos diádicos y el operador maximal diádico

La construcción de cubos diádicos es relativamente sencilla. En $\mathbb{R}$, sea el intervalo $[0,1)$ (podemos tomar también como intervalo de partida el $(0,1]$ pero lo haremos de la primera forma pues es lo más habitual entre los documentos de la bibliografía que tratan con cubos diádicos, por ejemplo, ver [6], [7], [13] o [20]). Consideremos la colección

$$\{[0,1)+m : m \in \mathbb{Z}\},$$

es decir, la colección de todos los intervalos congruentes con el intervalo unidad $[0,1)$ cuyos vértices —o extremos— pertenecen al conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$. Si a esta colección de intervalos la multiplicamos por un factor 2^{-k}, $k \in \mathbb{Z}$, obtenemos las colecciones

$$\mathscr{D}_k(\mathbb{R}) = \{2^{-k}([0,1)+m) : m \in \mathbb{Z}\},\ k \in \mathbb{Z}. \tag{3.1}$$

Notemos que en las colecciones de (3.1) los intervalos tienen una longitud mayor a medida que k es más pequeño. La unión de todas esas colecciones en $k \in \mathbb{Z}$ forman los denominados intervalos diádicos estándar en $\mathbb{R}$. Escrito en forma matemática, la colección de todos los intervalos diádicos estándar en $\mathbb{R}$ viene dada por

$$\mathscr{D}(\mathbb{R}) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathscr{D}_k(\mathbb{R}).$$

De forma análoga a como hemos definido los intervalos diádicos estándar en $\mathbb{R}$ podemos definir los cubos diádicos estándar en $\mathbb{R}^n$ como la colección

$$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n),$$

donde

$$\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n) = \{2^{-k}([0,1)^n+m) : m \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Esta definición o construcción dota a la familia $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ de todos los cubos diádicos estándar en $\mathbb{R}^n$ de varias propiedades importantes:

a) Para un k fijo, dado $x \in \mathbb{R}^n$, existe un único cubo $Q \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$ tal que $x \in Q$.

b) Para cada $k \in \mathbb{Z}$, la colección $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$ es una partición de $\mathbb{R}^n$, es decir, que se cumple que

1) Para cada $m \in \mathbb{Z}^n$, $2^{-k}([0,1)^n+m) \subseteq \mathbb{R}^n$ y $2^{-k}([0,1)^n+m) \neq \emptyset$.
2) Para cada $m \neq m'$, $(2^{-k}([0,1)^n+m)) \cap (2^{-k}([0,1)^n+m')) = \emptyset$.
3) $\displaystyle\bigcup_{m\in\mathbb{Z}^n} 2^{-k}([0,1)^n + m) = \mathbb{R}^n$.

c) Fijado $k \in \mathbb{Z}$, cada $\mathscr{D}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ es un refinamiento de $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$, es decir, se tiene que

$$Q = \bigcup_{\substack{Q' \in \mathscr{D}_{k+1}(\mathbb{R}^n) \\ Q' \subseteq Q}} Q',$$

para todo $Q \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$.

d) Dados $Q_1, Q_2 \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$Q_1 \cap Q_2 \in \{Q_1, Q_2, \emptyset\}.$$

En lo que sigue, utilizaremos la notación $\mathscr{D}$ en vez de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathscr{D}_k$ en vez de $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$.

Una vez vista la construcción de la colección $\mathscr{D}$ de los cubos diádicos estándar en $\mathbb{R}^n$ vamos a definir el operador maximal diádico asociado a dicha colección con la medida de Lebesgue.

Definición 3.1 (Operador maximal diádico)**.** Sea una función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y consideramos la colección $\mathscr{D}$ de todos los cubos diádicos estándar en $\mathbb{R}^n$. Llamaremos operador maximal diádico y lo denotaremos por M_d al operador dado por

$$M_d f(x) = \sup_{\substack{Q \in \mathscr{D} \\ Q \ni x}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos diádicos de $\mathbb{R}^n$ que contienen al punto x.

Observemos que la definición de M_d es prácticamente la misma que la de M salvo que en este caso el supremo se toma sobre todos los cubos diádicos en $\mathscr{D}$ que contienen al punto x. Esto proporciona una desigualdad puntual inmediata entre M_d y M de la forma $M_d f(x) \leq Mf(x)$. Debido a esto, como en el Capítulo 2 vimos que M era un operador $(1,1)$-débil en $L^1(\mathbb{R}^n)$ y que era un operador acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$, podemos deducir que M_d también posee este tipo de acotaciones. Sin embargo, nuestro propósito en este capítulo es probar propiedades de acotación para el operador maximal de Hardy-Littlewood a partir de propiedades de acotación del operador maximal diádico —en realidad, como adelantamos al inicio, serán varios los operadores maximales diádicos que consideremos—. Además, las pruebas que daremos a continuación para ver acotaciones de M_d proporcionarán constantes más precisas en las desigualdades que si usamos el hecho de que $M_d f(x) \leq Mf(x)$.

La siguiente proposición nos muestra que el operador maximal diádico es $(1,1)$-débil. En la prueba que se presenta se utilizan varias de las propiedades enunciadas anteriormente de los cubos diádicos.

Proposición 3.2. *El operador M_d es un operador $(1,1)$-débil, es decir, para una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y λ número real mayor que cero, cumple la siguiente desigualdad*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}| \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_1.$$

Demostración. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y consideremos el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}$. Notemos que si $x \in \mathbb{R}^n$ es tal que $M_d f(x) > \lambda$, existe un cubo diádico maximal, Q, de tal forma que $x \in Q$ y

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f| > \lambda.$$

Es importante observar que efectivamente existe tal cubo diádico maximal debido a que tenemos las siguientes desigualdades

$$\lambda < \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy \leq \frac{\|f\|_1}{|Q|},$$

de donde se tiene que

$$|Q| = (l(Q))^n < \frac{\|f\|_1}{\lambda},$$

y $\|f\|_1 < \infty$ pues $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Notemos también que el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}$ se puede escribir como una unión disjunta de cubos diádicos maximales. En efecto, si Q es el cubo maximal que contiene a un punto x de dicho conjunto, cualquier otro punto $y \in Q$ debe tener como cubo maximal también a Q pues de lo contrario, si existiera un cubo maximal Q' tal que $y \in Q$ con $Q \subseteq Q'$, x también estaría en Q' y eso es una contradicción con que Q sea el cubo maximal que contiene a x. Así,

$$\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\} = \bigcup_j Q_j.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
|\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}| &= \sum_j |Q_j| < \frac{1}{\lambda}\sum_j \int_{Q_j} |f(y)|\,dy \\
&\leq \frac{1}{\lambda}\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : M_d f(x)>\lambda\}} |f(y)|\,dy \\
&\leq \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,dy.
\end{aligned}$$

□

Corolario 3.1. *Sean $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $Q_k \in \mathscr{D}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, tal que $x \in Q_k$. Se tiene que*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f(y)\,dy = f(x),$$

en casi todo punto.

Demostración. Aplicando el Teorema 2.6, puesto que el resultado se cumple para cualquier función continua se verifica también para cualquier función en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Ahora, notemos que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ entonces $f\chi_Q \in L^1(\mathbb{R}^n)$, con $Q \in \mathscr{D}_0$. Luego el resultado se verifica para casi todo $x \in Q$ y por tanto para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. □

Acabamos de ver que el operador maximal diádico cumple una desigualdad de tipo $(1,1)$-débil, en cambio, no se cumple una desigualdad de tipo fuerte, es decir, que el operador maximal diádico no está acotado en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Para ver esto basta aplicar un argumento similar al que hicimos para M pero con la diferencia que ahora la función f la consideramos con soporte compacto en $(0,\infty)^n$.

Sin embargo, este tipo de acotación se cumple en cualquier espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$ siempre que $p>1$. Una forma directa de probar esto es utilizar el Teorema 2.4 de interpolación de Marcinkiewicz y la acotación inmediata del operador maximal diádico en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ como ya hicimos para el caso del operador maximal de Hardy-Littlewood.

Pero no utilizaremos ahora este procedimiento sino que nos apoyaremos en el Lema 2.2, más en concreto en la ecuación (2.2).

Proposición 3.3. *El operador M_d está acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1<p\le\infty$, es decir, cumple la desigualdad*

$$\|M_d f\|_p \le C\|f\|_p,$$

donde C es una constante que depende de p y de n.

Demostración. Notemos, como ya hemos señalado en el párrafo anterior a esta proposición, que la acotación en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ se deduce inmediatamente a partir de la definición.

Ahora, usando (2.2) tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |M_d f(x)|^p\,dx &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}|\{x\in\mathbb{R}^n : M_d f(x)>\lambda\}|\,d\lambda \\ &\le p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n:M_d f(x)>\lambda\}}|f(x)|\,dx\,d\lambda.\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Fubini la expresión anterior es igual a

$$\begin{aligned}&p\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\int_0^\infty \lambda^{p-2}\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n:M_d f(x)>\lambda\}}\,d\lambda\,dx \\ &\qquad = p\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\int_0^{M_d f(x)}\lambda^{p-2}\,d\lambda\,dx.\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |M_d f(x)|^p\,dx &\leq \frac{p}{p-1}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||M_d f(x)|^{p-1}\,dx\\ &\leq \frac{p}{p-1}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |M_d f(x)|^p\,dx\right)^{1/p'},\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos aplicado la desigualdad de Hölder con los exponentes conjugados p y p'. Así, llegamos a que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |M_d f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p,$$

como queríamos probar. □

3.1.1. Operador maximal diádico con una medida general

Acabamos de definir el operador maximal diádico asociado a la colección $\mathscr{D}$ con la medida de Lebesgue. En cambio, en la construcción de los cubos diádicos no intervenía la medida del espacio en el que trabajaramos. Debido a esto, en este apartado extenderemos la definición del operador maximal diádico que ya habíamos visto para una medida de Borel localmente finita μ. Una vez hecho esto, estudiaremos sus propiedades de acotación en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Avanzamos que las pruebas de éstas serán muy similares a las del operador maximal diádico con la medida de Lebesgue por lo que gran parte del trabajo ya lo tenemos adelantado pero necesitaremos hacer alguna pequeña modificación.

Definición 3.4 (Operador maximal diádico para una medida general)**.** Sea μ una medida de Borel localmente finita. Llamaremos operador maximal diádico y lo denotaremos por M_d^μ al operador dado por

$$M_d^\mu f(x) = \sup_{\substack{Q\in\mathscr{D}\\ Q\ni x}} \frac{1}{\mu(Q)}\int_Q |f(y)|\,d\mu(y),$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos de $\mathbb{R}^n$ que contienen al punto x.

El operador M_d^μ también cumple una desigualdad de tipo débil en $L^1(\mu)$. En este caso, la prueba añade una diferencia con la de la Proposición 3.2 y es que esta vez no podemos asegurar la existencia de cubos maximales pues ahora la medida no es la medida de Lebesgue. Para solventar esto, recurriremos a familias de cubos en las que sí podamos garantizar la existencia un cubo maximal y luego usaremos un argumento de paso al límite para probar la desigualdad de tipo débil.

Proposición 3.5. *El operador M_d^μ es un operador $(1,1)$-débil, es decir, para una función $f \in L^1(\mu)$ y λ número real mayor que cero, cumple la siguiente desigualdad*

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_{1,\mu}.$$

Demostración. Sea $f \in L^1(\mu)$ y consideremos el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : M_d^\mu f(x) > \lambda\}$.

Notemos que si $x \in \mathbb{R}^n$ es tal que $M_d^\mu f(x) > \lambda$ existe un cubo diádico Q tal que $Q \ni x$ y verificando que

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(y)|\, d\mu(y) > \lambda.$$

No podemos garantizar que estos cubos sean maximales porque aunque se verifique la desigualdad anterior y lleguemos a que

$$\mu(Q) < \frac{\|f\|_{1,\mu}}{\lambda},$$

en general no hay una relación entre $\mu(Q)$ y el tamaño del cubo Q. Por ello, seguiremos un procedimiento de paso al límite que exponemos a continuación.

Fijemos un valor $a \in \mathbb{N}$. Definimos la colección

$$\mathscr{D}(a) = \{Q \in \mathscr{D} : l(Q) < 2^a\},$$

y

$$M_d^\mu f(x) = \sup_{\substack{Q \in \mathscr{D}(a) \\ Q \ni x}} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(y)|\, d\mu(y),$$

Así, la sucesión $\{M_{d,a}^\mu\}_{a\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona creciente con límite M_d^μ cuando a tiende a infinito.

También se cumple que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : M_{d,a}^\mu > \lambda\} = \cup_{j\in\mathbb{Z}} Q_j, \tag{3.2}$$

con $Q_j \in \mathscr{D}(a)$ y tal que

$$\frac{1}{\mu(Q_j)} \int_{Q_j} |f(y)|\, d\mu(y) > \lambda.$$

Y ahora los cubos Q_j, $j \in \mathbb{Z}$, sí son maximales pues hemos impuesto una cota a la longitud de su lado. Así,

$$\begin{aligned}
\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}) &= \sum_j \mu(Q_j) < \frac{1}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} |f(y)|\, d\mu(y) \\
&\leq \frac{1}{\lambda} \int_{\{x\in\mathbb{R}^n : M_d f > \lambda\}} |f(y)|\, d\mu(y) \\
&\leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, d\mu(y).
\end{aligned}$$

Entonces, aplicando el teorema de la convergencia monótona se tiene que

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : M_d^\mu f(x) > \lambda\}) &= \mu\left(\bigcup_{a\in\mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^n : M_{d,a}^\mu f(x) > \lambda\}\right) \\ &= \lim_{a\to\infty} \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : M_{d,a}^\mu f(x) > \lambda\}). \quad \square\end{aligned}$$

En $L^p(\mu)$, $1 < p \leq \infty$ tenemos una acotación de tipo fuerte para M_d^μ como nos muestra la siguiente proposición.

Proposición 3.6. *El operador M_d^μ está acotado en $L^p(\mu)$, $1 < p \leq \infty$, es decir, cumple la desigualdad*

$$\|M_d^\mu f\|_{p,\mu} \leq C\|f\|_{p,\mu},$$

donde C es una constante que depende de p y de n.

Demostración. Notemos que la demostración es similar a la demostración de la Proposición 3.3 sin más que cambiar cada aparición de la medida de Lebesgue por μ. $\square$

3.1.2. Acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood mediante el operador maximal diádico. Otras colecciones diádicas

Al comienzo del capítulo mencionamos que uno de nuestros objetivos se centraba en conseguir resultados de acotación para el operador maximal de Hardy-Littlewood a partir del operador maximal diádico. Una primera aproximación con el objetivo de resolver esta cuestión podría ser pensar en una desigualdad puntual del tipo

$$Mf(x) \leq CM_d f(x),$$

con C una constante que no dependa de f. Sin embargo, esto no se verifica en general. En efecto, sea f una función no nula en un conjunto de medida de Lebesgue positiva cuyo soporte está en $(-\infty, 0]^n$. Se tiene que $Mf(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por otro lado, $M_d f(x) = 0$ en los puntos $x \in \mathbb{R}^n \setminus (-\infty, 0]^n$.

A pesar de ello, sí es posible mayorar puntualmente el operador maximal de Hardy-Littlewood mediante varios operadores diádicos. Aunque como acabamos de probar, el operador maximal diádico por sí solo no nos sirve, es posible definir otros operadores diádicos que esencialmente presentan una forma similar a la dada en la Definición 3.1, con la salvedad que la colección que tomaremos ahora no será $\mathscr{D}$ sino otras colecciones diádicas que introducimos a continuación y que básicamente serán desplazamientos de $\mathscr{D}$.

En la construcción de la colección de los cubos diádicos en $\mathbb{R}^n$ tomábamos como cubo referencia $[0,1)^n$. En realidad, para definir una colección diádica no es necesario tomar este cubo sino que basta con que se cumplan una serie de propiedades que aparecen recogidas en la siguiente definición.

Definición 3.7 (Red diádica)**.** Diremos que una colección $\mathscr{D}^\alpha$ de cubos diádicos en $\mathbb{R}^n$ es una red diádica si verifica las siguientes propiedades

a) Cualquier cubo $Q \in \mathscr{D}^\alpha$ tiene los lados de la forma 2^k, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Dados $Q_0, Q_1 \in \mathscr{D}^\alpha$ se tiene que

$$Q_0 \cap Q_1 = \{Q_0, Q_1, \emptyset\}.$$

c) La colección de los cubos de lado 2^k con $k \in \mathbb{Z}$ fijado, es una partición de $\mathbb{R}^n$.

Así, dada una colección $\mathscr{D}^\alpha$ de cubos diádicos en $\mathbb{R}^n$ es posible definir un operador maximal diádico asociado a dicha colección sin más que cambiar $\mathscr{D}$ por $\mathscr{D}^\alpha$ en la Definición 3.1.

En nuestro propósito de mayorar puntualmente el operador maximal de Hardy-Littlewood mediante operadores diádicos empezaremos estudiando el caso en que la dimensión sea uno. Vamos a considerar la siguiente colección de intervalos diádicos

$$\mathscr{D}^1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathscr{D}^1_k,$$

donde

$$\mathscr{D}^1_k = \{2^{-k}([0,1)^n + m + (-1)^k/3) : m \in \mathbb{Z}\}.$$

Notemos que esta última colección $\mathscr{D}_k$ es esencialmente un desplazamiento de $\mathscr{D}$ en $\mathbb{R}^n$. Es posible dar una definición más general en $\mathbb{R}^n$ de sistemas diádicos desplazados para lo cual recomendamos al lector consultar [13].

Las colecciones $\mathscr{D}$ y $\mathscr{D}^1$ nos van a permitir acotar el operador maximal de Hardy-Littlewood. A continuación veremos un resultado para $\mathbb{R}$ del cual deduciremos inmediatamente la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood por operadores maximales diádicos.

Lema 3.1. *Dado I intervalo de $\mathbb{R}$, existe un intervalo J bien en $\mathscr{D}$, bien en $\mathscr{D}^1$, tal que I está contenido en J y $l(J) \leq 6l(I)$ donde*

$$\mathscr{D} = \{2^{-k}([0,1) + m)\} \qquad y \qquad \mathscr{D}^1 = \{2^{-k}([0,1) + m + (-1)^k/3)\}.$$

Demostración. Sea I intervalo de $\mathbb{R}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $I = (a, b)$, $a \neq b$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Basta probar los casos en que $1 \leq l(I) < 2$ y $2 \leq l(I) < 4$. En efecto, sea I' un intervalo de $\mathbb{R}$ de longitud cualquiera. Se tiene que existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $2^j \leq l(I) < 2^{j+2}$. Consideremos $I = 2^{-j}I$. Así, $l(I) \in [1, 4)$ y entonces existe J bien en $\mathscr{D}$ o bien en $\mathscr{D}^1$ tal que $I \subset J$ y $l(J) \leq 6l(I)$. Sea $J' = 2^j J$. Notemos que J' pertenece a $\mathscr{D}$ o a $\mathscr{D}^1$ y que $I' \subset J$ y $l(J') \leq 6l(I')$.

Probemos por tanto los dos casos particulares.

a) Caso $1 \leq l(I) < 2$: supongamos primero que $0 \in I$. Es suficiente con tomar $J = [-2/3, 4/3)$ pues así, $J \in \mathscr{D}$, $I \subset J$ y $2 = l(J) < 6 \cdot 1 \leq 6l(I)$.

   Supongamos ahora que $0 \notin I$. Si I está en un intervalo de la forma $[4m, 4m+4)$, $m \in \mathbb{Z}$, hemos terminado pues dicho intervalo está en $\mathscr{D}$ y $4 = l([4m, 4m+4)) < 6 \leq 6l(I)$. Si I no está contenido en un intervalo de la forma $[4m, 4m+4)$, se tiene que $a < 4m < b$.

   Si $b < 4m + 4/3$ tomando $J = [4m + 4/3 - 4, 4m + 4/3)$ se tiene. Si $b > 4m + 4/3$ y m es par, entonces notemos que $4m + 4/3$ no será vértice de la colección $\mathscr{D}^1_3$ y por tanto, tomando $J = [4m + 4/3 - 4, 4m + 4/3 + 4)$ se tiene. Si $b > 4m + 4/3$ por el contrario es impar, entonces $4m + 4/3$ será un vértice de la familia $\mathscr{D}^1_3$ pero $4m$ no será vértice de la familia $\mathscr{D}_3$ y así, basta tomar como J el intervalo $[4m - 4, 4m + 4)$.

b) Caso $2 \leq l(I) < 4$: supongamos primero que $0 \in I$. Es suficiente con tomar $J = [-8/3, 16/3)$ pues así, $J \in \mathscr{D}$, $I \subset J$ y $8 = l(J) < 6 \cdot 2 \leq 6l(I)$.

   Supongamos ahora que $0 \notin I$. Si I está contenido en un intervalo de la forma $[8m, 8m + 8)$, $m \in \mathbb{Z}$, hemos terminado pues dicho intervalo está en $\mathscr{D}$ y $8 = l([8m, 8m + 8)) < 6 \cdot 2 \leq 6l(I)$. Si I no está contenido en un intervalo de la forma $[8m, 8m + 8)$, se tiene que $a < 8m < b$.

   Notemos que $b < 8m + 16/3$ pues si b fuera mayor que $8m + 16/3$, la longitud del intervalo sería mayor que 4 ($a < 8m$). Para $b < 8m + 16/3$ tomar $J = [8m + 16/3 - 8, 8m + 16/3)$. □

De este resultado deducimos la siguiente proposición que muestra que es posible mayorar puntualmente el operador maximal de Hardy-Littlewood en $\mathbb{R}$ por dos operadores maximales diádicos, uno de ellos estará asociado a la colección $\mathscr{D}$ y el otro a la colección $\mathscr{D}^1$. Vamos a adoptar la notación M^0_d en lugar de M_d para el enunciado y la demostración.

Proposición 3.8. *En $\mathbb{R}$, se verifica la siguiente desigualdad*

$$Mf(x) \leq 6 \max(M^0_d f(x), M^1_d f(x)) \leq 6(M^0_d f(x) + M^1_d f(x)),$$

donde

$$M_d^1 f(x) = \sup_{\substack{I\in\mathscr{D} \\ I\ni x}} \frac{1}{|I|}\int_I |f(y)|\,dy,$$

y $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Demostración. Usando el Lema 3.1, si denotamos por I un intervalo cualquiera de $\mathbb{R}$, tenemos que

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f(x)|\,dx \leq \frac{6}{|J|}\int_J |f(x)|\,dx \leq 6M_d^i f(x),$$

para algún $i = 0, 1$ y donde J es el intervalo que aparece en el citado lema.

Entonces, se tiene que

$$Mf(x) \leq 6\max(M_d^0 f(x), M_d^1 f(x)) \leq 6(M_d^0 f(x) + M_d^1 f(x)). \qquad \square$$

La ocurrencia de usar la colección

$$\mathscr{D}^1 = \{2^{-k}([0,1) + m + (-1)^k/3)\},$$

junto a la colección $\mathscr{D}$ aparece por primera vez en [3], [10] y [26].

Veamos ahora que este argumento que hemos hecho en $\mathbb{R}$ es útil para dimensiones superiores. Dado un cubo Q cualquiera en $\mathbb{R}^n$ podemos escribirlo como producto cartesiano de intervalos en $\mathbb{R}$ de modo que $Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$. Para cada uno de estos intervalos I_i, $i = 1, \ldots, n$, existe un intervalo J_i bien en $\mathscr{D}$, bien en $\mathscr{D}^1$, tal que $I_i \subset J_i$ y $l(J_i) \leq 6l(I_i)$. Luego el conjunto $J_1 \times \cdots \times J_n$ contiene al cubo Q.

Si en el caso unidimensional eran necesarios dos colecciones de cubos diádicos, observemos que en el caso unidimensional utilizamos 2^n colecciones.

3.2. Descomposición de Calderón-Zygmund

En la demostración de la Proposición 3.2 se podía observar una peculiar descomposición del espacio $\mathbb{R}^n$. El siguiente resultado conocido como descomposición de Calderón-Zygmund formulado en 1952 por los matemáticos A. P. Calderón y A. Zygmund en el artículo [2] recoge este hecho.

Teorema 3.9 (Descomposición de Calderón-Zygmund)**.** *Sea una función* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *no negativa y sea* $\lambda > 0$*. Entonces existe una sucesión de cubos diádicos disjuntos* $(Q_j)_j$ *de modo que*

a) $f(x) \leq \lambda$ *para casi todo* $x \notin \bigcup_j Q_j$, *b)* $\left\| \bigcup_j Q_j \right\| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1,$

c) $\lambda < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(x)\, dx \leq 2^n \lambda.$

Demostración. Consideramos como cubos Q_j los cubos maximales de la demostración de la Proposición 3.2 que verificaban que

$$\bigcup_j Q_j = \{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}.$$

Comprobemos que la sucesión de estos cubos efectivamente verifica las propiedades del enunciado.

Para probar la primera parte supongamos que $x \notin \bigcup_j Q_j$. Esto implica que $x \notin \{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}$ y por tanto para todo cubo diádico Q_j tal que $x \in Q_j$ se tiene que

$$\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(x)\, dx \leq \lambda.$$

Como todos los promedios son menores o iguales que λ se tiene que el límite también lo es y aplicando el Corolario 3.1 se tiene que $f(x) \leq \lambda$.

La segunda parte se cumple pues es precisamente la desigualdad de tipo $(1,1)$-débil para el operador maximal diádico.

La primera desigualdad de la tercera parte también está ya probada. Veamos la desigualdad de la derecha, es decir,

$$\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(x)\, dx \leq 2^n \lambda.$$

Para cada Q_j, consideremos el cubo diádico $\tilde{Q}_j$ cuyo lado es el doble que el de Q_j y tal que $Q_j \subset \tilde{Q}_j$. Para ese cubo el promedio de la función es mayor que λ pues Q_j es maximal. Así,

$$\frac{1}{2^n |Q_j|} \int_{Q_j} f(x)\, dx \leq \frac{1}{|\tilde{Q}_j|} \int_{\tilde{Q}_j} f(x)\, dx \leq \lambda,$$

como queríamos probar. □

Nota 3.10. De la segunda desigualdad del apartado c) del Teorema 3.9 tenemos que

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}| &= \sum_j |Q_j| \geq \sum_j \frac{1}{2^n \lambda} \int_{Q_j} f(x)\, dx \\ &= \frac{1}{2^n \lambda} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}} f(x)\, dx. \end{aligned}$$

Como se verifica que $f(x) \leq M_d f(x)$ se tiene que $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \lambda\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}$ y así se cumple la siguiente desigualdad

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}| \geq \frac{1}{2^n \lambda} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \lambda\}} f(x)\, dx. \tag{3.3}$$

Capítulo 4

Desigualdades con pesos A_p

En este capítulo introduciremos desigualdades en espacios $L^p(w)$ con un peso w para los operadores maximales de Hardy-Littlewood y diádicos. Entendemos por espacio $L^p(w)$ un espacio $L^p(\mu)$ en el que la medida viene dada por $d\mu(x) = w(x)\,dx$ y llamaremos peso a una función medible, no negativa y localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ que toma valores en $(0,\infty)$ en casi todo punto. La norma de una función f en $L^p(w)$ es

$$\|f\|_{L^p(w)} = \|f\|_{p,w} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p w(x)\,dx\right)^{1/p}.$$

Vamos a ver un primer resultado que motiva el estudio de desigualdades para M en estos espacios porque afirma que si el operador maximal de Hardy-Littlewood verifica una desigualdad de tipo débil con una medida general μ, entonces dicha medida es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue[1] y este hecho es equivalente a que la medida sea de la forma $d\mu(x) = w(x)\,dx$.

Teorema 4.1. *Sea μ una medida regular, positiva y localmente finita sobre conjuntos compactos. Si se cumple una desigualdad de tipo débil*

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}) \leq \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_{p,\mu}\right)^p, \tag{4.1}$$

con C una constante que depende de n y de p y para todo $1 \leq q < \infty$, entonces μ es una absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.

Demostración. Sea K un conjunto compacto con medida de Lebesgue nula y sea ϵ número real mayor que cero. Se tiene que existe un conjunto abierto V tal que $\mu(V \setminus K) < \epsilon$ y $K \subset V$. Consideremos la función $f = \chi_{V\setminus K}$.

[1]Una medida μ es absolutamente continua con respecto a la medida ν si para todo conjunto E tal que $\nu(E) = 0$ se tiene que $\mu(E) = 0$.

Notemos que $Mf(x) = 1$. En efecto, existe un Q tal que $x \in Q$, $V \subset Q$ y

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,dx = \frac{|Q \setminus K|}{|Q|} = 1.$$

Ahora, para todo $t < 1$, tenemos que $K \subset \{x : Mf(x) > t\}$ luego $\mu(K) \leq \mu(\{x : Mf(x) > t\})$. De (4.1) tenemos que

$$\mu(\{x : Mf(x) > t\}) \leq \frac{C^p}{\lambda^p}\int |f(x)|^p\,d\mu(x),$$

y así,

$$\lambda^p \mu(K) \leq C\mu(V \setminus K) < C\epsilon.$$

Puesto que el enunciado se verifica para cualquier conjunto compacto, se verifica también para cualquier conjunto medible con la medida μ. □

El propósito de este capítulo es probar acotaciones de M en $L^p(w)$ utilizando, como hemos visto en el Capítulo 3, que el operador maximal de Hardy-Littlewood está mayorado puntualmente por varios operadores maximales diádicos. Así, para hacer esto, deberemos encontrar propiedades de acotación de los operadores maximales diádicos en los espacios $L^p(w)$.

En lo que sigue, consideraremos medidas que sean absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue.

La caracterización para la cual el operador maximal de Hardy-Littlewood está acotado en $L^p(w)$ fue dada por primera vez en 1972 por Benjamin Muckenhoupt ([18]). En el citado artículo se presenta una condición necesaria y suficiente para que dicho operador esté acotado en $L^p(w)$: está acotado —veremos enseguida de qué tipo de acotación se trata en función de los valores de p— si y sólo si w pertenece a la llamada clase A_p.

4.1. Clases A_p

Desde que Muckenhoupt dio su caracterización de la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood, las clases A_p han adquirido una especial importancia en el análisis. Esto es debido en gran parte a que el operador maximal de Hardy-Littlewood está relacionado de alguna forma a la teoría de integales singulares.

En esta sección veremos las definiciones de clases A_p para $1 \leq p < \infty$ y dedicaremos una sección más adelante para la clase A_∞ y pesos en A_∞.

La definición de clase A_p varía en función de p ya que para $p = 1$ es distinta que para los demás valores de $1 < p < \infty$.

Definición 4.2 (Clase A_1)**.** Llamamos clase A_1 al conjunto de todas las funciones medibles, no negativas y localmente integrables w que cumplen la desigualdad

$$Mw(x) \leq Cw(x), \tag{4.2}$$

en casi todo punto y donde C es una constante cualquiera. Además, llamaremos constante A_1 de w y la denotaremos por $[w]_{A_1}$ a la menor constante para la que se verifica la desigualdad (4.2).

Definición 4.3 (Clase A_p)**.** Para $1 < p < \infty$, llamamos clase A_p al conjunto de todas las funciones medibles, no negativas y localmente integrables w que cumplen que

$$\sup_Q \frac{w(Q)}{|Q|} \left(\frac{w^{1-p'}(Q)}{|Q|} \right)^{p-1} < \infty, \tag{4.3}$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q de $\mathbb{R}^n$. Además, llamaremos constante A_p de w y la denotaremos por $[w]_{A_p}$ al valor del supremo de (4.3).

Nota 4.4. Si denotamos $u = w^{1/p}$ la expresión en (4.3) adquiere una forma más simétrica y es equivalente a

$$\sup_Q \frac{\|u\|_{L^p(Q)} \|u^{-1}\|_{L^{p'}(Q)}}{|Q|} < \infty.$$

Las desigualdades (4.2) y (4.3) se denominan condición A_1 y condición A_p para w, respectivamente y a las funciones $w \in A_p$ las denominaremos pesos A_p.

4.1.1. Propiedades básicas de los pesos A_p

Las funciones peso de A_p guardan propiedades de interés que se derivan de las propias definiciones de las clases A_p, $1 < p < \infty$.

Teorema 4.5 (Propiedades de los pesos A_p)**.** *Sea $1 < p < \infty$ y w, w_0, w_1 pesos cualesquiera. Se verifican los siguientes enunciados*

a) *$w \in A_p$ si y solo si $w^{1-p'}$ está en $A_{p'}$ y se cumple que $[w^{1-p'}]_{A_{p'}} = [w]_{A_p}^{p'-1}$.*

b) *Si $q < p$ entonces $A_q \subset A_p$ y se tiene que $[w]_{A_p} \leq [w]_{A_q}$.*

c) *Si $w \in A_p$ y $0 \leq \alpha \leq 1$ entonces $w^\alpha \in A_p$ y se cumple que $[w^\alpha]_{A_p} \leq [w]_{A_p}^\alpha$.*

d) *Si $w_0, w_1 \in A_p$ y $0 \leq \alpha \leq 1$ entonces $w_0^\alpha w_1^{1-\alpha} \in A_p$ y se tiene $[w_0^\alpha w_1^{1-\alpha}]_{A_p} \leq [w_0]_{A_p}^\alpha [w_1]_{A_p}^{1-\alpha}$.*

e) Si $w_0, w_1 \in A_1$ *entonces* $w_0 w_1^{1-p} \in A_p$ *y se tiene que* $[w_0 w_1^{1-p}]_{A_p} \leq [w_0]_{A_1}[w_1]_{A_1}^{p-1}$.

Demostración. a) Sea w un peso en A_p. Aplicando la condición A_p obtenemos

$$[w]_{A_p}^{p'-1} = \left(\sup_Q \frac{w(Q)}{|Q|}\left(\frac{w^{1-p'}(Q)}{|Q|}\right)^{p-1}\right)^{p'-1}$$
$$= \sup_Q \frac{w^{p'-1}(Q)}{|Q|^{p'-1}}\left(\frac{w^{1-p'}(Q)}{|Q|}\right)$$
$$= \sup_Q \frac{w^{1-p'}(Q)}{|Q|}\left(\frac{(w^{1-p'})^{1-p}(Q)}{|Q|}\right)^{p'-1} = [w^{1-p'}]_{A_{p'}}.$$

Por tanto, si $w \in A_p$ se tiene que $[w]_{A_p} < \infty$ y como $p \neq 1$, también que $[w]_{A_p}^{p'-1}$. Entonces $[w^{1-p'}]_{A_{p'}} < \infty$ y así $w^{1-p'} \in A_{p'}$. Equivalentemente si $w^{1-p'} \in A_{p'}$ se tiene que $w \in A_p$.

b) Basta ver que $[w]_{A_p} \leq [w]_{A_q}$. Sabemos, por definición, que

$$[w]_{A_p} = \sup_Q \frac{w(Q)}{|Q|}\left(\frac{w^{1-p'}(Q)}{|Q|}\right)^{p-1}.$$

Ahora aplicamos la desigualdad de Hölder con los valores conjugados $r = (1-q')/(1-p')$ y $r' = (1-q')/(p'-q')$ y tenemos que

$$[w]_{A_p} \leq \sup_Q \frac{w(Q)}{|Q|}\left(\int_Q w^{1-q'}(x)dx\right)^{\frac{-1}{1-q'}} |Q|^{\frac{(p'-q')(p-1)}{1-q'}-p+1}.$$

Teniendo en cuenta que p y p' y q y q' son conjugados, el término de la derecha es igual a

$$\sup_Q \frac{w(Q)}{|Q|}\left(\frac{w^{1-q'}(Q)}{|Q|}\right)^{q-1} = [w]_{A_q}.$$

c) Supongamos que $w \in A_p$. Es suficiente con probar que $[w^\alpha]_{A_p} \leq [w]_{A_p}^\alpha$. Veamos por tanto esta desigualdad. Tenemos por definición que

$$[w^\alpha]_{A_p} = \sup_Q \frac{w^\alpha(Q)}{|Q|}\left(\frac{w^{\alpha(1-p')}(Q)}{|Q|}\right)^{p-1}.$$

Aplicamos la desigualdad de Hölder con los exponentes conjugados $r = 1/\alpha$ y $r' = 1/(1-\alpha)$ (notemos que para que $r' \in [1,\infty]$ se debe cumplir que $0 \leq \alpha \leq 1$) y obtenemos que

$$[w^\alpha]_{A_p} \leq \sup_Q \frac{(w(Q))^\alpha}{|Q|^\alpha}\left(\int_Q w^{1-p'}(x)dx\right)^{\alpha(p-1)} |Q|^{-\alpha(p-1)} = [w]_{A_p}^\alpha.$$

d) Basta ver que $[w_0^\alpha w_1^{1-\alpha}]_{A_p} \leq [w_0]_{A_p}^\alpha [w_1]_{A_p}^{1-\alpha}$. Comprobemos esta desigualdad.

Por definición, tenemos que

$$[w_0^\alpha w_1^{1-\alpha}]_{A_p} = \sup_Q \frac{w_0^\alpha w_1^{1-\alpha}(Q)}{|Q|} \left(\frac{(w_0^\alpha w_1^{1-\alpha})^{1-p'}(Q)}{|Q|} \right)^{p-1}.$$

Aplicamos la desigualdad de Hölder con los exponentes conjugados $r = 1/\alpha$ y $r' = 1/(1-\alpha)$ (notemos como hemos mencionado en la propiedad anterior que esta asignación implica que $0 \leq \alpha \leq 1$) y obtenemos que

$$[w_0^\alpha w_1^{1-\alpha}]_{A_p} \leq \sup \frac{(w_0(Q))^\alpha (w_0^{1-p'}(Q))^{\alpha(p-1)} (w_1(Q))^{1-\alpha} (w_1^{1-p'}(Q))^{(1-\alpha)(p-1)}}{|Q|^p},$$

y atendiendo a que $|Q|^p = |Q||Q|^{(p-1)\alpha}|Q|^{(p-1)(1-\alpha)}$, la expresión de la derecha es claramente menor o igual que $[w_0]_{A_p}^\alpha [w_1]_{A_p}^{1-\alpha}$.

e) Suponiendo que $w_0, w_1 \in A_1$, basta probar que $[w_0 w_1^{1-p}]_{A_p} \leq [w_0]_{A_1}[w_1]_{A_1}^{p-1}$. Notemos primero que para un peso cualquiera $w \in A_1$ y cualquier cubo Q de $\mathbb{R}^n$ se verifica que

$$\frac{w(Q)}{|Q|} \leq Mw(x) \leq [w]_{A_1} w(x),$$

en casi todo punto y donde $x \in Q$. Luego

$$(w(x))^{-1} \leq [w]_{A_1} \frac{|Q|}{w(Q)}, \tag{4.4}$$

en casi todo punto y donde $x \in Q$.

Ahora, aplicando (4.4), por un lado tenemos que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w_0(x) w_1^{1-p}(x)\, dx = [w_1]_{A_1}^{p-1} \frac{w_0(Q)|Q|^{p-2}}{(w_1(Q))^{p-1}}. \tag{4.5}$$

Por otro lado,

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w_0^{1-p'}(x) w_1(x)\, dx \right)^{p-1} = [w_0]_{A_1} \frac{(w_1(Q))^{p-1}}{w_0(Q)|Q|^{p-2}}. \tag{4.6}$$

Multiplicando (4.5) y (4.6) obtenemos $[w_0]_{A_1}[w_1]_{A_1}^{p-1}$. Tomando supremos se obtiene que $[w_0 w_1^{1-p}]_{A_p} \leq [w_0]_{A_1}[w_1]_{A_1}^{p-1}$. □

4.1.2. Construcción de pesos A_p

En un principio, puede resultar una tarea no trivial dar pesos que estén en A_p. Sin embargo, si nos fijamos en la propiedad e) del Teorema 4.5 podemos observar que es posible construir pesos en A_p a partir de pesos en A_1. Luego nuestro objetivo se reduce a encontrar pesos que estén en A_1.

El siguiente resultado se debe al matemático español J. L. Rubio de Francia y se suele denominar comúnmente como Algoritmo de Rubio de Francia (ver [22] y [23]). Pese a que la formulación que aquí presentamos está dada en un contexto más general, de ella se puede obtener una forma de construir pesos en A_1.

Teorema 4.6 (Rubio de Francia)**.** *Sea μ una medida positiva en un espacio medible cualquiera y $p \geq 1$. Sea T un operador sublineal*[2] *acotado en $L^p(\mu)$ y con norma $\|T\|_{p,\mu}$. Dada $u \in L^p(\mu)$ no negativa, definimos*

$$Ru(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k u(x)}{(2\|T\|_{p,\mu})^k},$$

donde T^0 es el operador identidad y $T^k u = T(T^{k-1})u$. Entonces se tienen las siguientes afirmaciones

a) $u(x) \leq Ru(x)$*, en casi todo punto.*

b) $\|Ru\|_{p,\mu} \leq 2\|u\|_{p,\mu}$

c) $T(Ru)(x) \leq 2\|T\|_{p,\mu} Ru(x)$*, para casi todo punto x.*

Demostración. Notemos primero que claramente la serie Ru converge en la norma de $L^p(\mu)$ pues $\|Ru\|_{p,\mu} \leq 2\|u\|_{p,\mu}$.

a) Es inmediata si escribimos

$$Ru(x) = u(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^k u(x)}{(2\|T\|_{p,\mu})^k} \geq u(x), \quad ctp.$$

b) Notemos que $\|T^k u\|_{p,\mu} = \|T\|_{p,\mu}^k \|u\|_{p,\mu}$. Aplicando esto tenemos que

$$\begin{aligned}\|Ru\|_{p,\mu} = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k u(x)}{(2\|T\|_{p,\mu})^k} \right\|_{p,\mu} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{T^k u(x)}{(2\|T\|_{p,\mu})^k} \right\|_{p,\mu} \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{\|u\|_{p,\mu}}{2^k} \right\|_{p,\mu} &= 2\|u\|_{p,\mu}.\end{aligned}$$

[2] Recordar que un operador es sublineal si cumple que $|T(f+g)(x)| \leq |Tf(x)| + |Tg(x)|$ y $|T(\alpha f)(x)| = |\alpha||Tf(x)|$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

c) Vamos a hacer uso de la siguiente desigualdad

$$T\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} T u_k$$

que es cierta en casi todo punto.

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} T(Ru)(x) = T\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k u(x)}{(2\|T\|_{p,\mu})^k}\right) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} T\left(\frac{T^k u(x)}{(2\|T\|_{p,\mu})^k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^{k+1} u(x)}{(2\|T\|_{p,\mu})^k} = 2\|T\|_{p,\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^k u(x)}{(2\|T\|_{p,\mu})^k} \\ &\leq 2\|T\|_{p,\mu} Ru(x), \end{aligned}$$

en casi todo punto. □

Observemos que en efecto, como hemos mencionado con anterioridad, es el enunciado en c) del Teorema 4.6 el que nos garantiza la construcción de un peso A_1 sin más que tomar como operador T el operador maximal de Hardy-Littlewood.

El Algoritmo de Rubio de Francia no es la única forma de construir pesos en A_1. Damos aquí otro resultado debido a R. R. Coifman publicado en [5] donde también puede deducirse una construcción para pesos en A_1.

Teorema 4.7 (Coifman, 1980)**.** *Sea f una función localmente integrable de modo que $Mf(x) < \infty$ en casi todo punto y sea $0 \leq \alpha < 1$. Se tiene que $(Mf(x))^\alpha \in A_1$ y $[(Mf(x))^\alpha]_{A_1} \leq C(1-\alpha)^{-1}$, con C una constante que únicamente depende de la dimensión del espacio y no de f ni de α.*

Remitimos la prueba de este resultado a [5] o a [7].

4.1.3. La clase A_∞ y la desigualdad de Hölder inversa

Consideremos la expresión

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)\, dx,$$

donde Q es un cubo de $\mathbb{R}^n$ y w es un peso en A_p con $1 \leq p < \infty$. Si ahora aplicamos la desigualdad de Hölder a esta expresión con un exponente $r > 1$ y su conjugado r' obtenemos que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)\, dx \leq \frac{|Q|^{1/r'}}{|Q|} \left(\int_Q w^r(x)\, dx\right)^{1/r} = \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^r(x)\, dx\right)^{1/r}.$$

Queremos ver la desigualdad contraria introduciendo una constante C, es decir, si se verifica que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^r(x)\,dx\right)^{1/r} \leq \frac{C}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx.$$

Esta expresión es la conocida como desigualdad de Hölder inversa —su nombre está más que justificado—. A continuación, presentamos dos resultados, uno de los cuales nos da la llamada desigualdad de Jensen.

Lema 4.1. *Sea μ una medida de probabilidad*[3] *sobre un espacio medible X y f una función no negativa e integrable sobre X. Entonces, la función*

$$h(s) = \left(\int_X f^s\,d\mu\right)^{1/s},$$

es creciente en $(0,\infty)$, y además

$$\lim_{s\to 0^+} h(s) = \exp\left(\int_X \log f\,d\mu\right),$$

donde interpretamos $e^{-\infty}$ como 0.

La prueba puede seguirse en [7] o [11].

Una consecuencia de este lema es la siguiente desigualdad conocida como desigualdad de Jensen

$$\exp\left(\int_X \log f\,d\mu\right) \leq \left(\int_X f^s\,d\mu\right)^{1/s}. \tag{4.7}$$

Lema 4.2. *Sea $w \in A_p$, $1 \leq p < \infty$, y $0 < s < 1$, entonces*

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx &\leq C\exp\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \log w(x)\,dx\right)\\ &\leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^s(x)\,dx\right)^{1/s},\end{aligned} \tag{4.8}$$

donde la constante C no depende de s.

Demostración. Supongamos que $w \in A_p$, $1 \leq p < \infty$. En el apartado b) del Teorema 4.5 vimos que las clases A_p son crecientes a medida que p aumenta. Así, para todo $q > p$ tenemos que

$$[w]_{A_q} = \sup_Q \frac{w(Q)}{|Q|}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-1/(q-1)}(x)\,dx\right)^{q-1} \leq [w]_{A_p}.$$

[3]Recordemos que una medida de probabilidad es una medida μ definida sobre un espacio medible X verificando que $\mu(X) = 1$.

Ahora, tomando el límite cuando q tiende a infinito y aplicando el Lema 4.1 llegamos a que

$$\sup_Q \frac{w(Q)}{|Q|} \exp\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \log w^{-1}(x)\,dx\right) \leq [w]_{A_p},$$

de donde obtenemos que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx \leq C\exp\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \log w(x)\,dx\right),$$

donde C no depende de s. Esto prueba la primera desigualdad del enunciado.

La segunda desigualdad se deduce de la ecuación (4.7). □

Denotaremos a la menor constante que verifica (4.8) por $[w]_{A_\infty}$. Notemos que se verifica que $[w]_{A_\infty} \leq [w]_{A_p}$, $1 \leq p < \infty$.

Utilizando estos dos resultados vamos a ver que la desigualdad de Hölder inversa es cierta. Este es un resultado fundamental en la teoría de pesos. La prueba que presentamos es debida a Alberto de la Torre aunque no llegó a publicarse.

Teorema 4.8 (Desigualdad de Hölder inversa)**.** *Sea $w \in A_p$, $1 \leq p < \infty$. Existen constantes $C > 0$ y $r > 1$ que dependen únicamente de p, de la dimensión n y de $[w]_{A_\infty}$ tales que para cualquier cubo Q de $\mathbb{R}^n$ se tiene que*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^r\,dx\right)^{1/r} \leq \frac{C}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx. \tag{4.9}$$

Demostración. Sea $w \in A_p$, $1 \leq p < \infty$ y Q un cubo en $\mathbb{R}^n$. Notemos primero que dado $x \in Q$, para calcular el valor de $M_d(w\chi_Q)(x)$ basta con considerar los promedios en los cubos contenidos en Q.

Aplicando el Lema 4.2 se tiene que

$$M_d(w\chi_Q)(x) \leq [w]_{A_\infty} M_d(w^s\chi_Q)(x)^{1/s}, \tag{4.10}$$

donde C no depende de s. Por otra parte, para $t > w(Q)/|Q|$, tenemos que

$$\begin{aligned} w(\{x \in Q : w(x) > \lambda\}) &\leq 2^n\lambda|\{x \in Q : M_d w(x) > \lambda\}| \\ &\leq 2^n\lambda|\{x \in Q : [w]_{A_\infty} M_d(w^s\chi_Q)(x)^{1/s} > \lambda\}| \\ &\leq C'2^n\lambda^{1-s}[w]_{A_\infty}^s \\ &\quad w^s(\{x \in Q : (w(x))^s > \lambda^s/(2[w]_{A_\infty}^s)\}), \end{aligned}$$

donde en la primera igualdad hemos aplicado (3.3), en la segunda (4.10) y en la tercera (2.9). Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_Q w(x)^r\,dx &= (r-1)\int_0^\infty \lambda^{r-2} w(\{x\in Q : w(x)>\lambda\})\,d\lambda \\ &\le \frac{(w(Q))^r}{|Q|^{r-1}} + (r-1)2^n C'[w]_{A_\infty}^s \\ &\quad \int_{w(Q)/|Q|}^\infty \lambda^{r-s-1} w^s(\{x\in Q : (w(x))^s > \lambda^s/(2[w]_{A_\infty}^s)\})\,d\lambda \\ &\le \frac{(w(Q))^r}{|Q|^{r-1}} + C''\frac{r-1}{r/s-1}\int_Q w^r(x)\,dx,\end{aligned}$$

con C'' una constante que depende de la dimensión n, de r, de s y de $[w]_{A_\infty}$. Ahora, fijado $0<s<1$, elegimos $r>1$ lo suficientemente próximo a uno y así llegamos a que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^r(x)\,dx\right)^{1/r} \le \left(1 - C''\frac{r-1}{r/s-1}\right)^{-1/r}\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx,$$

como queríamos probar. □

Nota 4.9. Observar que es posible encontrar un ϵ verificando que $\epsilon \le K/[w]_{A_\infty}$, para una cierta constante K, tal que si $1<r<1+\epsilon$ la constante C que aparece en (4.9) sea igual a 2 (independiente de r).

El siguiente teorema nos muestra que efectivamente la unión $w \in \bigcup_{q<p} A_q$ que mencionábamos al principio de la sección coincide con la clase A_p. Adoptamos la notación $\sigma = w^{1-p'}$.

Teorema 4.10. *Sea $w\in A_p$. Si $p>1$ existe $\epsilon>0$ tal que $w\in A_{p-\epsilon}$.*

Demostración. Supongamos que $w\in A_p$. Por el apartado a) del Teorema 4.5 se tiene que $w^{1-p'}\in A_{p'}$ y por tanto satisface la desigualdad de Hölder inversa, es decir,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (\sigma(x))^r\,dx\right)^{1/r} \le \frac{C}{|Q|}\int_Q w^{1-p'}(x)\,dx.$$

Entonces, elevando la desigualdad anterior a $p-1$ y multiplicando a ambos lados por $w(Q)/|Q|$ se tiene que

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (\sigma(x))^r\,dx\right)^{p-1/r} \le C'[w]_{A_p}.$$

Tomamos q tal que $1-q' = (1-p')r$ y así deducimos que $[w]_{A_q} \le C''[w]_{A_p}$. □

La siguiente definición está motivada por hecho de que la unión de clases A_q es igual a la clase A_p para $q < p$ y porque las clases A_p crecen a medida que lo hace p.

Definición 4.11 (Clase A_∞)**.** Llamamos clase A_∞ a la unión de todas las clases A_p, $1 \leq p < \infty$. Además, llamaremos constante A_∞ de w a la constante anteriormente definida $[w]_{A_\infty}$.

La clase A_∞ fue introducida de forma independiente por Coifman y Fefferman (ver [4]) y por Muckenhoupt (ver [19]).

4.2. Desigualdades con pesos para los operadores maximales

En anteriores capítulos nos hemos preocupado de estudiar si los operadores de Hardy-Littlewood y diádicos estaban acotados en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ donde $1 \leq p \leq \infty$. En especial, nos centramos en las propiedades de acotación de los operadores maximales diádicos pues de ellas deducíamos después las propiedades de acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood. Vimos que los operadores maximales diádicos son operadores acotados en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p \leq \infty$ y que cumplían una desigualdad de tipo $(1,1)$-débil cuando $p = 1$.

También definimos el operador maximal diádico con una medida μ de Borel localmente finita. Vimos que cumplía una desigualdad de tipo $(1,1)$-débil en $L^1(\mu)$ y que estaba acotado en $L^p(\mu)$ para $1 < \mu \leq \infty$.

Ahora, una vez introducidos los espacios $L^p(w)$, nuestro cometido será estudiar qué tipo de acotaciones, si es que se produce alguna, tiene el operador maximal diádico M_d en estos espacios.

El siguiente resultado afirma que el operador maximal diádico es $(1,1)$-débil en $L^p(w)$ con $w \in A_1$.

Proposición 4.12. *El operador M_d es $(1,1)$-débil en $L^1(w)$ con $w \in A_1$, es decir, dada una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y λ un número real mayor que cero, se cumple que*

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{1,w},$$

donde C es una constante que depende de únicamente de $[w]_{A_1}$ y no de f.

Demostración. Sea $f \in L^1(w)$ y consideremos el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}$. Sabemos que dicho conjunto se puede escribir como una unión disjunta de cubos diádicos maximales

$$\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\} = \bigcup_j Q_j,$$

donde cada Q_j verifica que

$$\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|\,dx>\lambda. \tag{4.11}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} w(\{x\in\mathbb{R}^n : M_d f(x)>\lambda\}) &= w\left(\bigcup_j Q_j\right)\leq \sum_j \frac{w(Q_j)}{|Q_j|}|Q_j| \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}\frac{w(Q_j)}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|\,dx. \end{aligned}$$

Como $w(Q_j)/|Q_j|\leq M_d w(x)$ y $w\in A_1$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}\sum_j \frac{w(Q_j)}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|\,dx &\leq \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}\int_{Q_j}|f(x)|M_d w(x)\,dx \\ &\leq \frac{[w]_{A_1}}{\lambda}\|f\|_{1,w} \end{aligned}$$ □

La prueba anterior proporciona la conocida como desigualdad de Fefferman-Stein para el operador maximal diádico. Recogemos esta desigualdad en el siguiente teorema cuya prueba se sigue de la demostración anterior.

Teorema 4.13 (Fefferman-Stein)**.** *Sea f una función en $L^1(\mathbb{R}^n)$ y sea u una función medible y no negativa. Se tiene que*

$$u(\{x\in\mathbb{R}^n : M_d f(x)>\lambda\})\leq \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|M_d u(x)\,dx, \tag{4.12}$$

con C una constante que depende únicamente de p, n y w y no de f.

Notemos que este teorema también se cumple para el operador maximal de Hardy-Littlewood.

Con el objetivo de probar la acotación fuerte del operador maximal diádico en $L^p(w)$, damos ahora una desigualdad puntual debida a A. K. Lerner y presentada en [16] en la que se acota el operador maximal diádico por un operador diádico con medida.

Lema 4.3 (Desigualdad de Lerner)**.** *Para $1<p<\infty$ y $w\in A_p$ se cumple que*

$$(M_d f)^{p-1}\leq [w]_{A_p} M_d^w[(M_d^\sigma(f\sigma^{-1}))^{p-1}w^{-1}].$$

Demostración. Fijemos un cubo diádico Q. Entonces tenemos que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q f=\frac{\sigma(Q)}{|Q|}\frac{1}{\sigma(Q)}\int_Q f\sigma^{-1}\sigma\leq\frac{\sigma(Q)}{|Q|}M_d^\sigma(f\sigma^{-1})(x),$$

para todo $x \in Q$. Así,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q f\right)^{p-1}& \\ &\leq \left(\frac{\sigma(Q)}{|Q|}\right)^{p-1}\frac{w(Q)}{|Q|}\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q (M_d^\sigma(f\sigma^{-1}))^{p-1}w^{-1}w\right)\\ &= [w]_{A_p}\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q (M_d^\sigma(f\sigma^{-1}))^{p-1}w^{-1}w\right).\end{aligned}$$

Si ahora tomamos el supremo sobre todos los cubos diádicos que contienen al punto x tenemos que

$$(M_d f)^{p-1} \leq [w]_{A_p} M_d^w[(M_d^\sigma(f\sigma^{-1}))^{p-1}w^{-1}]. \qquad \square$$

Usando esta desigualdad de Lerner junto con la acotación del operador maximal diádico definido con una medida μ podemos probar la siguiente proposición.

Teorema 4.14. *El operador maximal diádico está acotado en $L^p(w)$ para $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$. Además, se tiene la siguiente desigualdad*

$$\|M_d f\|_{p,w} \leq C_p[w]_{A_p}^{1/(p-1)}\|f\|_{p,w},$$

donde C_p es una constante que depende únicamente de p y n.

Demostración. Tenemos que $\|M_d f\|_{p,w} = \|(M_d f)^{p-1}\|_{p',w}^{1/(p-1)}$. Aplicando ahora el Lema 4.3 obtenemos la desigualdad

$$\begin{aligned}\|M_d f\|_{p,w} &= \|(M_d f)^{p-1}\|_{p',w}^{1/(p-1)}\\ &\leq [w]_{A_p}^{1/(p-1)}\|M_d^w[(M_d^\sigma(f\sigma^{-1}))^{p-1}w^{-1}]\|_{p',w}^{1/(p-1)}.\end{aligned}$$

Aplicamos ahora la acotación fuerte del operador maximal diádico definido con una medida reiteradamente y obtenemos la siguiente cadena de desigualdades

$$\begin{aligned}\|M_d f\|_{p,w} &\leq [w]_{A_p}^{1/(p-1)}\|M_d^w[(M_d^\sigma(f\sigma^{-1}))^{p-1}w^{-1}]\|_{p',w}^{1/(p-1)}\\ &\leq [w]_{A_p}^{1/(p-1)}(p\|(M_d^\sigma(f\sigma^{-1}))^{p-1}w^{-1}\|_{p',w})^{1/(p-1)}\\ &= [w]_{A_p}^{1/(p-1)}p^{1/(p-1)}\|M_d^\sigma(f\sigma^{-1})\|_{p,\sigma}\\ &\leq [w]_{A_p}^{1/(p-1)}p^{1/(p-1)}p'\|f\sigma^{-1}\|_{p,\sigma}\\ &= p^{1/(p-1)}p'[w]_{A_p}^{1/(p-1)}\|f\|_{p,w}. \qquad \square\end{aligned}$$

Este resultado es el teorema de Buckley para la función maximal diádica y proporciona una cota para la norma de $M_d f$ en función de la constante $[w]_{A_p}$.

Dado que se puede mayorar el operador maximal de Hardy-Littlewood por varios operadores diádicos y éstos cumplen una desigualdad de tipo $(1,1)$-débil en $L^1(w)$ y una desigualdad de tipo fuerte en $L^p(w)$, $1 < p \leq \infty$, el operador M también posee estas acotaciones.

La prueba original de Muckenhoupt para mostrar que el operador maximal de Hardy-Littlewood está acotado en $L^p(w)$, $1 < p \leq \infty$ y con $w \in A_p$, se basaba en probar la acotación $(1,1)$-débil en $L^1(w)$ y después aplicar el teorema de interpolación de Marcinkiewicz (Teorema 2.4). A continuación presentamos esta prueba pero con el operador maximal diádico.

Argumentando de modo similar a la Proposición 4.12 tenemos que dada $f \in L^1(w)$ se tiene que

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}) = \bigcup_j Q_j,$$

donde cada Q_j cumple que

$$\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(x)|\, dx > \lambda.$$

Así,

$$\begin{aligned} w(\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}) = w\left(\bigcup_j Q_j\right) &\leq \sum_j \frac{w(Q_j)}{|Q_j|^p} |Q_j|^p \\ &\leq \sum_j \frac{w(Q_j)}{|Q_j|^p} \left(\frac{1}{\lambda} \int_{Q_j} |f| w^{1/p} w^{-1/p}\right)^p. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Hölder con los exponentes conjugados p y p' la expresión anterior es menor o igual que

$$\begin{aligned} &\sum_j \frac{w(Q_j)}{|Q_j|^p} \left(\frac{1}{\lambda} \left(\int_{Q_j} |f|^p w\right)^{1/p} (\sigma(Q_j))^{1/p'}\right)^p \\ &\qquad = \sum_j \frac{w(Q_j)}{|Q_j|^p} \frac{(\sigma(Q_j))^{p-1}}{\lambda^p} \int_{Q_j} |f|^p w. \end{aligned}$$

El último término de la derecha es menor o igual que $[w]_{A_p}/\lambda^p \|f\|_{p,w}^p$. Por tanto tenemos que

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}) \leq \frac{[w]_{A_p}}{\lambda^p} \|f\|_{p,w}^p,$$

es decir, que el operador M_d es (p,p)-débil.

Ahora, dado $w \in A_p$ fijamos un $q < p$. Sabemos por lo que acabamos de ver que M_d es (q,q)-débil y también es inmediato que es un operador acotado en $L^\infty(w)$. Aplicando el Teorema 2.4 de interpolación de Marcinkiewicz obtenemos que

$$\|M_d f\|_{p,w} \leq \frac{C[w]_{A_q}^{1/p}}{(p-q)^{1/p}} \|f\|_{p,w}.$$

Por la Nota 4.9, tomando $p - q < C/[\sigma]_{A_\infty}$ se tiene que $[w]_{A_q} \leq 2[w]_{A_p}$ y por tanto tenemos que

$$\|M_d f\|_{p,w} \leq \frac{C[w]_{A_p}^{1/p}}{(p-q)^{1/p}} \|f\|_{p,w},$$

y entonces el operador maximal diádico está acotado en $L^p(w)$. Si aplicamos a esta última ecuación que $p - q < C/[\sigma]_{A_\infty}$ se obtiene que

$$\|M_d f\|_{p,w} \leq C[w]_{A_p}^{1/p} [\sigma]_{A_\infty}^{1/p} \|f\|_{p,w}.$$

Esta última estimación se debe a T. Hytönen y C.Pérez y puede verse en [15]. En el citado artículo también se prueba que está estimación es más precisa que la que aparece en el Teorema 4.14.

Capítulo 5

Epílogo

El análisis diádico ha demostrado ser de una gran utilidad estos últimos años pues gracias a él se han logrado probar varias conjeturas sobre todo en la teoría de integrales singulares y operadores de Calderón-Zygmund y en aspectos relativos al tamaño de las constantes de los pesos A_p en las desigualdades con norma de operadores clásicos.

Definición 5.1 (Operador de Calderón-Zygmund)**.** Llamaremos operador de Calderón-Zygmund a un operador lineal T definido de $L^2(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y con la siguiente forma

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)dy, \qquad x \notin \mathrm{sop}(f),$$

donde K es llamado núcleo y satisface las siguientes condiciones

a) $|K(x,y)| \leq \dfrac{C}{|x-y|^n}$, para todo $x \neq y$.

b) Existe $0 < \alpha \leq 1$ llamado exponente de regularidad tal que

$$|K(x,y) - K(x',y)| + |K(y,x) - K(y,x')| \leq C\frac{|x-x'|^\alpha}{|x-y|^{n+\alpha}},$$

siempre que $|x-x'| < |x-y|/2$.

Uno de los problemas matemáticos más famosos relacionados con las clases y pesos A_p, $1 \leq p < \infty$ ha sido hasta hace poco la llamada conjetura A_2. Algunas investigaciones necesitaban de la acotación de un determinado operador de Calderón-Zygmund conocido como operador de Beurling T_{beu} dado por la expresión

$$T_{beu} = \lim_{\epsilon\to 0} -\frac{1}{-\pi}\iint_{|z-w|\geq\epsilon} \frac{h(z)}{(z-w)^2}\,dx\,dy,$$

en $L^p(w)$ pero además que dicha acotación fuera de la forma

$$\|T_{beu}f\|_{p,w} \leq C[w]_{A_p}\|f\|_{p,w},$$

con C una constante que no depende de la función f.

Esta cuestión atrajo el interés de varios matemáticos. Por medio de extrapolación, la acotación de T_{beu} —y en general de cualquier operador de Calderón-Zygmund— para cualquier valor de p se obtenía a partir únicamente de la acotación en $L^2(w)$ por lo que era suficiente con probar que

$$\|Tf\|_{2,w} \leq C[w]_{A_2}\|f\|_{2,w}.$$

Sería en 2002 cuando S. Petermichl y A. Volberg probarían el resultado.

En 2007 y 2008, de nuevo Petermichl probó la acotación en $L^2(w)$ de la transforma de Hilbert y la transformada de Riesz, respectivamente. Las pruebas presentadas para estos tres operadores de Calderón-Zygmund eran particulares por lo que surgió la denominada conjetura A_2: para un operador general T de Calderón-Zygmund se verifica que

$$\|Tf\|_{2,w} \leq C\|f\|_{2,w},$$

$f \in L^2(w)$ y C una constante que no depende de f.

Posteriormente a los resultados obtenidos para el operador de Beurling y las transformadas de Hilbert y de Riesz se sucedieron una serie de pruebas para otros operadores de Calderón-Zygmund: en 2008 O. Beznosova obtuvo la acotación para el paraproducto diádico y en 2010 M. Lacey, S. Petermichl y M. Reguera consiguieron acotar los operadores de desplazamiento de Haar. Sin embargo, las pruebas seguían siendo particulares para cada operador.

Sería en 2010 cuando T. Hytönen probaría la conjetura A_2 (ver [14]). Más tarde, la complejidad de la prueba de Hytönen fue simplificada por A. Lerner en [17].

Para concluir, presentamos las llamadas familias dispersas o *sparse families* las cuales han tenido una gran importancia en el desarrollo de las acotaciones de integrales singulares. Por ejemplo, en la prueba de la conjetura A_2 dada por Lerner en [17] se utilizan *sparse families*.

Lema 5.1. *Sea f una función en L^1. Es posible construir una sucesión doble de cubos diádicos (Q_j^k) verificando las siguientes propiedades*

a) Fijado un valor de k los cubos son disjuntos para todo j.

b) Para un j_0 fijo, si denotamos

$$E(Q_{j_0}^k) = Q_{j_0}^k \setminus \bigcup_j Q_j^{k+1},$$

se cumple que

$$|E(Q_{j_0}^k)| \geq \frac{1}{2}|Q_{j_0}^k|,$$

Además se tiene que

$$M_d f(x) \sim C \sum_{k,j} \left(\frac{1}{|Q_j^k|} \int_{Q_j^k} |f| \right) \chi_{E(Q_j^k)}(x),$$

donde C es una constante.

Demostración. Consideramos una sucesión de números reales creciente $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ cuyo límite cuando k tiende a $-\infty$ es 0 y cuando k tiende a ∞ es ∞. Vamos a ver qué cómo debe ser esta sucesión para que se verifiquen las propiedades del enunciado.

Para cada λ_k, por el Teorema 3.9 del Capítulo 3, tenemos que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda_k\} = \bigcup_j Q_j^k,$$

donde la unión de la parte de la derecha de la desigualdad es una unión en j de cubos diádicos disjuntos y maximales. Esto prueba apartado a). Además, estos cubos verifican, también por el Teorema 3.9, que

$$\lambda_k < \frac{1}{|Q_j^k|} \int_{Q_j^k} |f| \leq 2^n \lambda_k. \tag{5.1}$$

Veamos ahora que se verifica el apartado b). Primero notemos que los cubos que verifican que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda_{k+1}\} = \bigcup_{j'} Q_{j'}^{k+1},$$

deben estar contenidos en los cubos Q_j^k. En efecto, supongamos que existe un cubo $\tilde{Q}_{j'}^{k+1}$ que no está contenido en ningún cubo Q_j^k. Notemos que si $x \in Q_j^k$ se tiene que $M_d f(x) > \lambda_{k+1}$. Pero como $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión creciente se tiene que $\lambda_k < \lambda_{k+1}$ y por tanto el punto x verifica también que $M_d f(x) > \lambda_k$ y así x pertenece a algún cubo Q_j^k lo cual es un absurdo.

Fijemos un cubo $Q_{j_0}^k$. Como hemos visto, este cubo puede contener (podría darse el caso que no contuviera ninguno) cubos $Q_{j'}^{k+1}$. Supongamos que hay m cubos $Q_{j'}^{k+1}$ contenidos en $Q_{j_0}^k$, $m\mathbb{N}$.

Para que se verifique la propiedad b) del enunciado se debe cumplir que

$$\bigcup_{j'=1}^{m} Q_{j'}^{k+1} \leq \frac{1}{2} |Q_{j_0}^k|.$$

Y como $Q_{j_0}^k$ verifica (5.1) y cada $Q_{j'}^{k+1}$ la misma expresión pero en vez de con λ_k con λ_{k+1} tenemos la siguiente cadena de desigualdades

$$2^n \lambda_k |Q_{j_0}^k| \geq \int_{Q_{j_0}^k} |f| \geq \sum_{j'=1}^{m} \int_{Q_{j'}^{k+1}} |f| \geq \sum_{j'=1}^{m} \lambda_{k+1} |Q_{j'}^{k+1}|,$$

de donde

$$|Q^k_{j_0}| \geq \frac{\lambda_{k+1}}{2^n \lambda_k} \sum_{j'=1}^{m} |Q^{k+1}_{j'}|. \tag{5.2}$$

Imponemos ahora la condición

$$\frac{\lambda_{k+1}}{2^n \lambda_k} \sum_{j'=1}^{m} |Q^{k+1}_{j'}| \geq 2 \sum_{j'=1}^{m} |Q^{k+1}_{j'}|,$$

de donde obtenemos que $\lambda_{k+1} \geq 2^{n+1}\lambda_k$. Luego si exigimos a nuestra sucesión inicial $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ que $\lambda_{k+1} \geq 2^{n+1}\lambda_k$ para todo k, tenemos que se verifica la propiedad b).

Notemos que de lo anterior se tiene que

$$M_d f(x) \sim C \sum_{k,j} \left(\frac{1}{|Q^k_j|} \int_{Q^k_j} |f| \right) \chi_{E(Q^k_{j_0})}(x). \qquad \square$$

Una familia de cubos como la del enunciado del Lema 5.1 se denomina familia dispersa o *sparse family*.

Bibliografía

[1] S. M. Buckley, *Estimates for operator norms on weighted spaces and reverse Jensen inequalities*, Trans. Amer. Math.Soc. **340** (1993), no. 1, 253–272. MR1124164 (94a:42011).

[2] A. P. Calderón y A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math. **88** (1952), no. 1, 85–139. MR0052553 (14,637f).

[3] S.-Y. A. Chang, J. M. Wilson y T. H. Wolff, *Some weighted norm inequalities concerning the Schrödinger operators*, Comment. Math. Helv. **60** (1985), no. 2, 217–246. MR0800004 (87d:42027).

[4] R. R. Coifman y C. Fefferman, *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals*, Studia Math. **51** (1974), 241–250. MR0358205 (50 #10670).

[5] R. R. Coifman y R. Rochberg, *Another characterization of BMO*, Proc. Amer. Math. Soc. **79** (1980), no. 2, 249–254. MR565349 (81b:42067).

[6] J. Duoandikoetxea, *Fourier analysis*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 29. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. MR2754896.

[7] J. Duoandikoetxea, Forty years of Muckenhoupt weights, *Function Spaces and Inequalities*, Lecture Notes Paseky and Jizerou 2013 (J. Lukeš, L. Pick ed.), Matfyzpress, Praga, 2013, 23–75.

[8] J. García-Cueva y J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 116, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985. MR0807149 (87d:42023).

[9] J. B. Garnett, *Bounded analytic functions*, Pure and Applied Mathematics, vol. 96, Academic Press Inc., New York, 1981. MR628971 (83g:30037).

[10] J. B. Garnett y P. W. Jones, *BMO from dyadic BMO*, Pacific J. Math. **99** (1982), no. 2, 351–371. MR0658065 (85d:42021).

[11] L. Grafakos, *Classical Fourier analysis*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 249, Springer, New York, 2008. MR2445437 (2011c:42001).

[12] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *A maximal theorem with function-theoretic applications*, Acta Math. **54** (1930), no. 1, 81–116. MR1555303.

[13] T. P. Hytönen, *Dyadic analysis and weights*, Lecture notes, University of Helsinki, 2014.

[14] T. P. Hytönen, *The sharp weighted bound for general Calderón-Zygmund operators*, Ann. of Math. (2) **175** (2012), no. 3, 1473–1506. MR2912709.

[15] T. P. Hytönen y C.Pérez, *Sharp weighted bounds involving A_∞*, Anal. PDE **6** (2013), no. 4, 777–818. MR3092729.

[16] A. K. Lerner *An elementary approach to several results on the Hardy-Littlewood maximal operator*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), no. 8, 2829–2833. MR2399047.

[17] A. K. Lerner *A simple proof of the A_2 conjecture*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2013, no. 14, 3159–3170. MR3085756.

[18] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207–226. MR0293384 (45 #2461).

[19] B. Muckenhoupt, *The equivalence of two conditions for weight functions*, Studia Math. **49** (1973/74), 101–106. MR0350297 (50 #2790).

[20] M. C. Pereyra y L. A. Ward, *Harmonic Analysis: From Fourier to Wavelets*, Student Mathematical Library, vol. 63. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. MR2933659.

[21] H. L. Royden, *Real analysis*, Third edition. Macmillan Publishing Company, New York, 1988. MR1013117 (90g:00004).

[22] J. L. Rubio de Francia, *Factorization and extrapolation of weights*, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) **7** (1982), no. 2, 393–395. MR663793 (83i:42016).

[23] J. L. Rubio de Francia, *Factorization theory and A_p weights*, Amer. J. Math. **106** (1984), no. 3, 533–547. MR745140 (86a:47028a).

[24] W. Rudin, *Real and complex analysis*, Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987. MR0924157 (88k:00002).

[25] N. Wiener, *The ergodic theorem*, Duke Math. J. **5** (1939), no. 1, 1–18. MR1546100.

[26] T. H. Wolff, *Two algebras of bounded functions*, Duke Math. J. **49** (1982), no. 2, 321–328. MR0659943 (84c:30051).